חשמל ומגנטיות - תרגול 12

- חוק ביו-סבאר
- דיפולים מגנטיים

חוק ביו-סבאר Biot-Savart Law

בקודמה לחוק קולון עבור השדה החשמלי הנוצר ע"י התפלגות מטען $\rho(\vec{r}')$:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}d^3r'}$$

ניתן לקבוע חוק לגבי השדה המגנטי הנוצר ע"י התפלגות זרמים, וזהו חוק ביו-סבאר:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}d^3r'}$$

הערות:

① ראינו כי בכיול קולון עבור הפוטנציאל הוקטורי $\vec{A}$ מתקיים כי:

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{j} \longleftarrow \text{כיול קולון!}$$

וכמו כן:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ע"י סופרפוזיציה, הפתרון הכללי של משוואות אלו הוא:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r' \longleftarrow \text{כיול קולון!}$$

הביטויים לשדות נובעים מהקשר:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\\ \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})\end{aligned}}$$

② יחידות

• הנוסחאות לשדות $\vec{E}$, $\vec{B}$ שרשמנו מקודם הם נכונים

• ביחידות MKS, שם כפי שראינו $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$

כאשר c זו מהירות האור בריק: $\left(c \simeq 3\times 10^8 \frac{m}{sec}\right)$

ביחידות אלו כוח לורנץ הוא $\vec{F}_L = q\vec{v}\times\vec{B}$.

• ביחידות cgs הנוסחאות נראות שונה.

בביטוי ל- $\vec{E}$ מחליפים

ובביטוי ל- $\vec{B}$ מחליפים

ובחוק לורנץ מחליפים

$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \longmapsto 1$	
$\frac{\mu_0}{4\pi} \longmapsto \frac{1}{c}$	
$\vec{B} \longmapsto \frac{1}{c}\cdot\vec{B}$	

לא ניכנס כעת לסיבות למעברים אלה!

כך מתקבל:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, d^3r'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, d^3r'$$

$$\vec{F}_L = q\cdot\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}$$

• מכיוון שבאופן כללי, צפיפות הזרם היא $\vec{j} = \rho\cdot\vec{v}$

אנחנו רואים מייד שמתקיים $\boxed{\vec{B}(\vec{r}) \sim \frac{v}{c}\cdot\vec{E}(\vec{r})}$

כלומר השדה המגנטי חלש יותר בפקטור $\frac{v}{c}$ מהשדה החשמלי.

• כמובן, הכוח המגנטי הוא $F_B \sim q\cdot\frac{v}{c}\cdot B \sim q\cdot\left(\frac{v}{c}\right)^2\cdot E$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_B \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2\cdot F_E}$$

כלומר הכוח המגנטי הפועל על חלקיק קטן, באופן טיפוסי, בפקטור $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ מהכוח החשמלי ← רק חלקיקים יחסותיים מושפעים משדות מגנטיים.

אנחנו נדגים עקרונות אלה באופן מפורש בהמשך התרגול.

(3) חוק ביו-סבאר עבור תיל דק נושא זרם

כידוע: $I=\iint \vec{j}\cdot d\vec{s}$. במקרה של תיל דק, $\vec{j}=0$ בכל מקום שאינו בתיל ואילו $d\vec{s}$ הוא שטח החתך של התיל, בכיוון הזרם.

במקרה כזה, בחוק ביו-סבאר ניתן להחליף את האינטגרל d^3r' באינטגרל dl בכיוון הזרם כפול אינטגרל d^2r' במישור שניצב לזרם.
האינטגרל במישור זה יתן לנו פשוט I, מכיוון שבכל נקודה שאינה על התיל, כאמור, $\vec{j}=0$, ואילו ע"ג התיל, אנחנו פשוט רושמים $I=\iint \vec{j}\cdot d\vec{s}$

כעת, נגדיר את $d\vec{r}'$ להיות אלמנט אורך בכיוון הזרם לאורך התיל. כלומר $d\vec{r}'$ רץ, בכיוון הזרם, על כל הנקודות $\vec{r}'$ שבהן יש זרם. כך מתקבל:

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I(\vec{r}')\,d\vec{r}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$$

קוגמן I

תיל דק, אינסופי, הנושא זרם קבוע I.
נמקם את התיל לאורך ציר $\hat{z}$.

$$\boxed{\vec{B}(x,y,z)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(0,0,dz')\times(x,y,z-z')}{\left[x^2+y^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}}$$

כך,
$$\begin{cases} d\vec{r}'=dz'\hat{z} \\ \vec{r}-\vec{r}'=x\hat{x}+y\hat{y}+(z-z')\hat{z}\end{cases}$$

מהסימטריה של הבעיה, זה ברור כי לא יתכן שהשדה המגנטי תלוי בגובה z. לכן, נחשב אותו עבור $z=0$ וזה יהיה נכון גם לכל $z\neq 0$:

$$\vec{B}(x,y)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz'\frac{(x\hat{y}-y\hat{x})}{\left[x^2+y^2+z'^2\right]^{3/2}}$$

נסמן $R=\sqrt{x^2+y^2}$ המרחק מהתיל ונקבל:

$$\vec{B}(x,y)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{x}{R^3}\hat{y}-\frac{y}{R^3}\hat{x}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz'}{\left[1+\frac{z'^2}{R^2}\right]^{3/2}}$$

נסמן $u=\frac{z'}{R}$ ונקבל:

$$\boxed{\vec{B}(x,y)=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\frac{x}{R}\hat{y}-\frac{y}{R}\hat{x}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{(1+u^2)^{3/2}}}$$

פתרון האינטגרל נותן 2 (למשל, תציבו $u=\sinh(\eta)$
ולכן $du=\cosh(\eta)d\eta$ וגם $1+u^2=\cosh^2(\eta)$
ולכן $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{(1+u^2)^{3/2}}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{\cosh^2(\eta)}=tgh^2(\eta)\Big|_{-\infty}^{\infty}=2$)

עוד נזהה $\hat{\varphi}=\frac{x}{R}\hat{y}-\frac{y}{R}\hat{x}$ ונקבל:

$$\boxed{\vec{B}(R)=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{\varphi}}$$

כצפוי

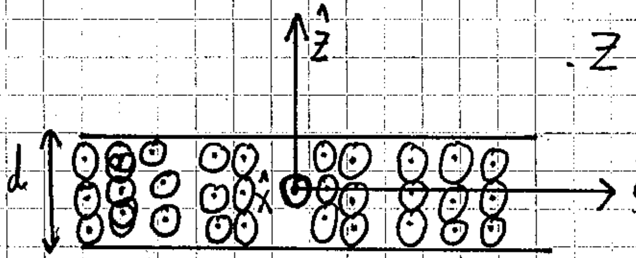
דוגמא II:

מהו השדה המגנטי הנוצר עקב משטח אינסופי בעובי d, שזורם בו זרם בצפיפות זרם אחידה $\vec{j}$?

פתרון

יכולנו לפתור שאלה זו באמצעות חוק אמפר ביתר קלות, כפי שראיתם בכיתה. כאן נשתמש בחוק ביו-סבאר. למעשה נצטרך לבצע אינטגרציה על השדות הנוצרים מאינסוף תילים אינסופיים, שכל אחד נושא זרם.

← נקבע את המישור להיות מישור XY כאשר כיוון הזרם הוא בכיוון $\hat{x}$, ונגדיר $\hat{z}$ המשטח נמצא בין $z=-\frac{d}{2}$ לבין $z=+\frac{d}{2}$.



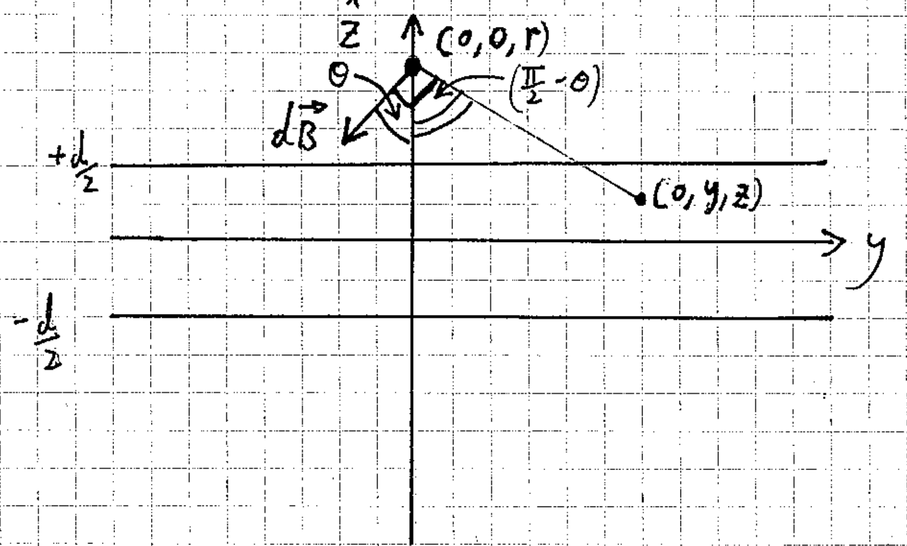
ניקח פיסה בעובי dy ובגובה dz של המשטח, ואז הזרם שזורם דרך פיסה זו (ב"תיל" שמייצג את פיסה זו) הוא $\boxed{dI = j\,dy\,dz}$

כל "תיל" כזה יוצר אמנם שדה מגנטי גם בכיוון $\hat{z}$ וגם בכיוון $\hat{y}$, אבל משיקולי סימטריה לא יתכן שדה בכיוון $\hat{z}$. למשל, אם נבצע טרנספורמציה של הצירים $\hat{z} \longmapsto -\hat{z}$ הבעיה הפיזיקלית תישאר זהה, אך הרכיב של $\vec{B}$ בכיוון $\hat{z}$ יתהפך: $B_z \longmapsto -B_z$ ולכן כל רכיב כזה הוא זהותית אפס.

מה שבפועל קורה הוא שכל רכיבי ה-$\hat{z}$ מתבטלים בין זוגות של תילים, שאחד מהם תורם תרומה כלפי מעלה והשני כלפי מטה. אבל, כל התילים הנ"ל תורמים שדה בכיוון $\hat{y}$ שמכוון לאותו כיוון ולכן זה לא מתאפס $\boxed{\text{(להקג'ים מכלל יד ימין)}}$

בכל אופן, עלינו רק לחשב את התרומה ל- B_y "מהתיל" שלנו.

נסתכל, בה"כ, על נקודה $(0,0,r)$ ועל "תיל" עם קורדינטות y, z.



$$dB_y = |dB|\cdot \sin\theta = |dB|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = |dB|\cdot\frac{(r-z)}{\sqrt{(r-z)^2+y^2}} = \left(\frac{\mu_0\, dI}{2\pi\sqrt{(r-z)^2+y^2}}\right)\cdot\frac{r-z}{\sqrt{(r-z)^2+y^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$B = \int dB_y = \frac{\mu_0 j}{2\pi}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r-z}{(r-z)^2+y^2}\,dy\,dz = \left(u\equiv\frac{y}{r-z}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 j}{2\pi}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}dz\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{1+u^2} = \frac{\mu_0\cdot j\cdot d}{2\pi}\cdot \operatorname{arctg}(u)\Big|_{u=-\infty}^{u=+\infty} =$$

$$= \frac{\mu_0 j d}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\mu_0\cdot j\cdot d}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 j\cdot d}{2}\,\hat{y}} \longrightarrow$$ שדה קבוע מחוץ ללוח!

הערות:

(I) הגודל $(j\cdot d)$ נקרא צפיפות הזרם המשטחית

ויש לו יחידות של אמפר למטר $[j\cdot d] = A/m$.

נסמן $\mathcal{J} \equiv j d$ ונקבל: $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\mathcal{J}\hat{y}}$

זה מאוד אנלוגי לשדה החשמלי מחוץ למשטח אינסופי טעון על מישור XY, עם צפיפות מטען אחידה ρ, שמצוי בין $z=-\frac{d}{2}$ לבין $z=+\frac{d}{2}$.

שם הגדרנו את <u>צפיפות המטען המשטחית</u> $\sigma \equiv \rho \cdot d$ וקיבלנו $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}$

(באופן כללי: $\mathcal{J} = \int dz\, j$, $\sigma = \int dz\, \rho$)

II הפתרון שקיבלנו $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\mathcal{J}\hat{y}$ תקף ~~רק~~ <u>מעל הלוח</u>.

מתחת ללוח כמובן שנקבל היפוך סימן $\boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0}{2}\mathcal{J}\hat{y}}$

(באינטגרציה, זה מתקבל מהעובדה ש: $(r-z)<0$ ולכן הגבולות של ה- arctg מתהפכים).

בתוך הלוח, עבור $0<r<\frac{d}{2}$, אז כל האינטגרציה לא נכונה, כי יש שם גם איברים חיוביים וגם שליליים.
מה שצריך לעשות במקרה הזה הוא להבין שאנחנו נמצאים <u>מעל</u> לוח בעובי $(\frac{d}{2}+r)$ ומתחת ללוח בעובי $(\frac{d}{2}-r)$ כך נקבל:

$$\boxed{\vec{B}} = \frac{\mu_0}{2} j \left[\left(\frac{d}{2}+r\right)-\left(\frac{d}{2}-r\right)\right]\hat{y} = \boxed{\mu_0 j r \hat{y}}$$

תוצאה זו גם תקפה בתחום $-\frac{d}{2}<r<0$ וכמובן שיש רציפות ב- $r=0,\pm d$.

<u>גבול</u>, בגבול שבו $d \to 0$, $j \to \infty$, $\mathcal{J}=j\cdot d=const$, יש <u>אי-רציפות</u> במשטח ומתקיים

$$\boxed{\mu_0\mathcal{J} = \Delta B_{\parallel} = B_y(z\to 0^+) - B_y(z\to 0^-)}$$

קושיה III:

מהו השדה המגנטי שיוצר מטען נקודתי q בראשית שנע במהירות קבועה $\vec{V}$?

<u>פתרון</u>

חישוב ישיר ע"י חוק ביו-סבאר:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r})}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\rho(\vec{r}')\cdot\vec{V}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}d^3r'=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\vec{V}\times\vec{r}}{r^3}\iiint\rho\, d^3r'$$

($\rho\neq0$ רק כאשר $\vec{r}'=0$)

$$\boxed{=\frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\vec{V}\times\vec{r}}{r^3}=}\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\cdot\frac{\vec{V}\times\vec{r}}{r^3}=\boxed{\frac{Kq}{c^2}\cdot\frac{\vec{V}\times\vec{r}}{r^3}}$$

אם נשווה את זה לשדה החשמלי שיוצר מטען כזה:
$\vec{E}(\vec{r})=\frac{Kq\vec{r}}{r^3}$, נשים לב שלי $\vec{E}$ ולי $\vec{B}$ אין את אותן

היחידות, ולכן קשה להשוות ביניהם!

<u>אבל</u>, לו היינו משתמשים בחוק ביו-סבאר ביחידות cgs

שם כאמור $\frac{\mu_0}{4\pi}\longrightarrow\frac{1}{c}$ היינו מקבלים:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r})}=\frac{1}{c}\cdot q\cdot\frac{\vec{V}\times\vec{r}}{r^3}=\frac{\vec{V}}{c}\times\left(\frac{q\vec{r}}{r^3}\right)=\boxed{\frac{\vec{V}}{c}\times\vec{E}(\vec{r})}$$

ולכן, כאמור, השדה המגנטי חלש יותר מהחשמלי בפקטור

של $\frac{V}{c}$, והם נמדדים <u>באותן יחידות</u>!!

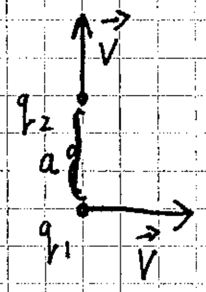
עוד נעיר שכשהמטען משנה את מהירותו לוקח למידע על כך

זמן <u>סופי</u> להגיע לכל מקום, שהרי המידע נע במהירות סופית C

(שהיא מהירות האור)

קולמכו IV:

מטען q_1 נמצא בראשית ומהירותו $\vec{V}_1 = V\hat{x}$
באותו זמן, מטען q_2 נמצא ב- $\vec{r}_2 = a\hat{y}$ ומהירותו $\vec{V}_2 = V\hat{y}$.
מהם הכוחות שהמטענים מפעילים אחד על השני?



פתרון:

ביחידות MKS, ממה שראינו עד כה, מטען q_1 יוצר

• את השדות:

$$\boxed{\vec{E}_1(\vec{r}) = Kq_1 \frac{\vec{r}}{r^3}}, \quad \vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{Kq_1}{c^2}\frac{V\hat{x}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$\boxed{\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{Kq_1}{c^2}\cdot\frac{V}{r^3}(y\hat{z} - z\hat{y})}$$

• המטען q_2 יוצר את השדות:

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = Kq_2 \frac{\vec{r} - a\hat{y}}{|\vec{r} - a\hat{y}|^3}$$

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{Kq_2}{c^2}\frac{V\hat{y}\times(\vec{r} - a\hat{y})}{|\vec{r} - a\hat{y}|^3} = \frac{Kq_2}{c^2}\cdot\frac{V}{|\vec{r} - a\hat{y}|^3}(z\hat{x} - x\hat{z})$$

• השדות שהמטען q_2 מרגיש:

$$\vec{E}_1(a\hat{y}) = \frac{Kq_1}{a^2}\hat{y}$$

$$\vec{B}_1(a\hat{y}) = \frac{Kq_1 V}{c^2 a^2}\hat{z}$$

• השדות שהמטען q_1 מרגיש:

$$\vec{E}_2(0) = -\frac{Kq_2}{a^2}\hat{y}$$

$$\vec{B}_2(0) = 0$$

הכוח ש- q_1 מפעיל על q_2:

$$\vec{F}_{12} = q_2\left[\vec{E}_1(\vec{r}_2) + \vec{V}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2)\right] = q_2\left[\frac{kq_1}{a^2}\hat{y} + V\hat{y} \times \frac{k}{c^2}\frac{q_1 V}{a^2}\hat{z}\right] =$$

$$\boxed{\vec{F}_{1,2} = \frac{kq_1q_2}{a^2}\left[\underbrace{\hat{y}}_{\text{תרומת השדה החשמלי}} + \underbrace{\frac{V^2}{c^2}\hat{x}}_{\text{תרומת השדה המגנטי קטנה בפקטור } \left(\frac{V}{c}\right)^2}\right]}$$

הכוח ש- q_2 מפעיל על q_1:

$$\boxed{\vec{F}_{2,1}} = q_1\left[\vec{E}_2(\vec{r}_1) + \vec{V}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1)\right] = \boxed{-\frac{kq_1q_2}{a^2}\hat{y}}$$

<u>שים לב:</u> $\vec{F}_{1,2} \neq -\vec{F}_{2,1}$

כלומר החוק השלישי של ניוטון מופר!
כלומר, אנו קיבלנו מערכת סגורה של 2 חלקיקים שבו סכום כל הכוחות הפנימיים אינו אפס!
זהו לכאורה בסתירה לחוק שימור התנע!
הפתרון, כפי שתלמדו בשנה הבאה בקורס בחשמל אנליטי, הוא שהמערכת היא לא באמת סגורה ושלמעשה <u>השדות עצמם</u> נושאים בתנע הנוקל.

לפי מכניקה ניוטונית, החלקיקים מפעילים זה על זה כוחות הקיימים בו-זמנית, אולם לפי תורת היחסות אנו יודעים שלוקח לאינטרקציה זמן סופי לעבור מחלקיק אחד לשני, והשדות החשמלי + מגנטי הם אלה שמעבירים את האינטרקציה.
אבל, אנחנו רואים שהאפקט פרופורציונאלי ל- $\left(\frac{V}{c}\right)^2$
כלומר בגבול הקלאסי שבו $V \ll c$, האפקט <u>זניח</u>.

מומנט דיפול מגנטי

ראינו בעבר בפיתוח המולטיפולי של הפוטנציאל החשמלי (האלקטרוסטטי)

$$\phi(\vec r) = \iiint \frac{K\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}\, d^3r'$$

כאשר המטענים תחומים באזור סופי (כלומר קיים איזשהו R כך שעבור $r'>R$ מתקיים $\rho(\vec r')=0$) אז פיתחנו את ϕ בטור טיילור במרחקים $r \gg R$. כתבנו:

$$\phi(\vec r) = \phi^{(0)}(\vec r) + \phi^{(1)}(\vec r) + \phi^{(2)}(\vec r) + \dots$$

- האיבר הראשון $\phi^{(0)}(\vec r)$ הוא איבר המונופול:

$$\boxed{\phi^{(0)}(\vec r) =} \iiint \frac{K\rho(\vec r')}{r}\, d^3r' = \boxed{\frac{K Q_{tot}}{r}}\ ,\quad \boxed{Q_{tot} = \iiint \rho(\vec r')\, d^3r'}$$

~~הפוטנציאל שנוצר ממטען נקודתי שנמצא בראשית~~

זהו הפוטנציאל שהיה מתקבל אם כל המטען היה מרוכז במטען נקודתי בראשית.

- האיבר השני $\phi^{(1)}(\vec r)$ הוא איבר הדיפול החשמלי:

$$\boxed{\phi^{(1)}(\vec r) =} \iiint \frac{K\left(\rho(\vec r')\,\vec r'\right)\cdot \hat{r}}{r^2}\, d^3r' = \boxed{\frac{K\,\vec p \cdot \vec r}{r^3}}$$

$$\boxed{\vec p = \iiint \rho(\vec r')\,\vec r'\, d^3r'}$$ כאשר הגדרנו את וקטור הדיפול החשמלי

- האיבר $\phi^{(2)}(\vec r)$ הוא איבר הקוודרופול החשמלי וניתן להראות שמתקיים

$$\phi^{(2)}(\vec r) = \frac{K}{2r^5}\, \vec r \cdot \left(\overleftrightarrow{Q}\, \vec r\right)$$

$\overleftrightarrow{Q}$ הוא מטריצה 3×3 שנקראת "טנזור הקוודרופול"
האיברים שלה נתונים ע"י

$$\boxed{Q_{ij} = \iiint \rho(\vec r')\left(3r'_i r'_j - \delta_{ij} r'^2\right) d^3r'}$$

$$\left(\begin{array}{l} i,j=\{1,2,3\} \\ r_1 = x \quad r_2 = y \quad r_3 = z \\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i\neq j \end{cases} \end{array}\right)$$

כמובן שיש גם אוקטופול, הקסהדקהפול, ועוד עם איברים בפיתוח המלא, אך זה נדיר מאוד שיש להתחשב במשהו מעבר לקוודרופול.

- בצורה דומה לפיתוח הנ"ל, ניתן לפתח את השדה הוקטורי

$$\vec A = \iiint \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec j(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}\, d^3r' \quad \text{(בגבול קולון)}$$

ואת השדה המגנטי

$$\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec j(\vec r')\times(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}\, d^3r'$$

בפיתוח מולטיפולי דומה.

- כפי שאמרנו בעבר, אין מונופול מגנטי* (אמפירית)
כלומר כאשר כל המטענים תחומים בנפח סופי* ואין מטענים מחוץ לנפח זה, אזי מתקיים בהכרח $\iiint \vec j(\vec r')\, d^3r' = 0$

- לכן נתחיל מהדיפול המגנטי:

מומנט הדיפול המגנטי:

$$\boxed{\vec m \equiv \frac{1}{2}\iiint \vec r' \times \vec j(\vec r')\, d^3r'}$$

(יש גם, כמובן, קוודרופול מגנטי, אוקטופול מגנטי וכו', אבל אנחנו נסתפק כאן בדיפול המגנטי).

עבור לולאת זרם שזורם בו זרם I, נגדיר $d\vec r'$ להיות

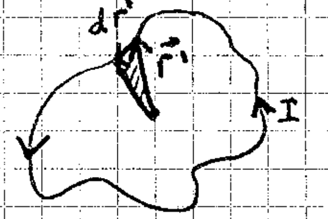
אלמנט אורך בכיוון הזרם, וכמובן $\vec{r}'$ מצביע על נק' לאורך התיל מהראשית ומקבלים:

$$\vec{m} = I \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\oint \vec{r}' \times d\vec{r}'} = I \cdot \vec{S}$$

שטח הלולאה עם כיוון שנקבע ללולאה לפי כלל יד ימין

$$\left|\frac{1}{2}\vec{r}' \times d\vec{r}'\right| = \frac{1}{2} r' dr' \sin(\theta) = dS \Longrightarrow$$

שטח המשולש שנפרש ע"י $\vec{r}'$ ו- $d\vec{r}'$



- כלומר עבור לולאת זרם, מומנט הדיפול שווה לזרם כפול שטח הלולאה וכיוון בניצב ללולאה, לפי כלל יד ימין.
- מומנט הדיפול של סליל המורכב מ- N לולאות זרם (כריכות) הוא $\vec{m} = N \cdot I \cdot \vec{S}$, לפי עיקרון הסופרפוזיציה.
- השוואה בין דיפול מגנטי לדיפול חשמלי:

$$\phi = \frac{K \vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \qquad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad \text{(כמו קולון)}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{r^3}} \qquad \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{r^3}}$$

$$\boxed{U = -\vec{p} \cdot \vec{E}} \qquad \boxed{U = -\vec{m} \cdot \vec{B}}$$ אנרגיה של דיפול בשדה חיצוני

(כאשר $\vec{E}$, $\vec{B}$ הם השדות במרכז הדיפולים, שמניחים שהם נקודתיים)

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E})} \qquad \boxed{\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})}$$:כוח על דיפול

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}} \qquad \boxed{\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}}$$:מומנט כוח

דוגמא: מעגלית

לולאה בעלת מסה M ורדיוס R נמצאת בשדה מגנטי חיצוני קבוע $\vec{B} = B\hat{z}$. בלולאה זורם זרם I. בזמן $t=0$ הלולאה מונחת כך שציר הסימטריה שלה נמצא במישור XZ.

א) רשום משוואות תנועה עבור הלולאה

ב) מהו זמן המחזור עבור תנודות קטנות של ציר הלולאה סביב ציר $\hat{z}$?

פתרון

א) השדה החיצוני אחיד ולכן לא פועל נטו כוח על הלולאה:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B}) = \vec{m}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) = 0$$

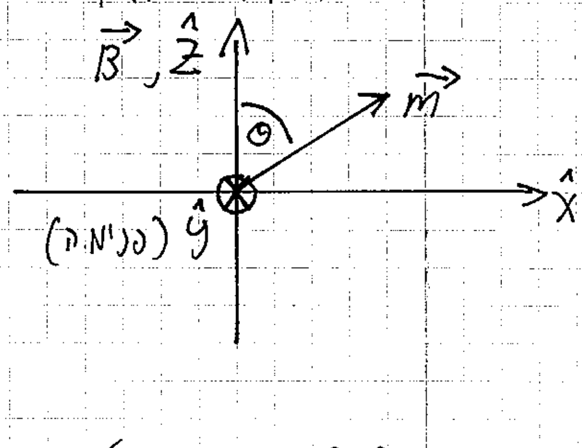
מומנט הכוח הוא:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{m}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{m}$$

כל עוד $\vec{m}$ במישור XZ (כמו שנתון ב $t=0$), מומנט הכוח הוא בכיוון $\hat{y}$ (ניצב למישור XZ). זה יגרום לסיבוב סביב ציר $\hat{y}$ וישאיר את $\vec{m}$ בתוך מישור XZ!

לכן, בכל זמן $\boxed{\vec{\tau} \parallel \hat{y}}$

מומנט ההתמד של לולאה מעגלית במסה M ורדיוס R סביב ציר סיבוב שניצב לציר הלולאה הוא $I = \frac{1}{2}MR^2$. לכן:



במצב המצויר, $\vec{m}\times\vec{B}$ הוא החוצה ולכן $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \parallel (-\hat{y})$ כלומר אנחנו יוצרים סיבוב נגד כיוון השעון ומקטינים את θ.

קל לראות שהמומנט תמיד ישאף להקטין את הזווית θ.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{m}\times\vec{B} = m\cdot B\cdot \sin\theta(-\hat{y})$$ לכן:

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} = \underset{\text{מומנט התמד}}{I}\,\ddot{\theta} = -m\cdot B\cdot \sin\theta = -\underset{\text{זרם}}{I}\cdot \pi R^2\cdot B\cdot \sin\theta$$

$$\Downarrow$$

משוואת תנועה של מטוטלת

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{2mB\sin\theta}{MR^2} = -\frac{2\pi I B}{M}\sin\theta}$$

ב) בזוויות קטנות, $\theta \sim \sin\theta$ ומקבלים:

$$\ddot{\theta} \cong -\frac{2mB}{MR^2}\cdot\theta = -\frac{2\pi I B}{M}\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_0^2 = \frac{2mB}{MR^2} = \frac{2\pi I B}{M}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{T =} \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{2\pi I B}} = \boxed{\sqrt{\frac{2\pi M}{I B}}}$$

יחידות:

$$\left[\sqrt{\frac{M}{IB}}\right] = \left[\sqrt{\frac{M\cdot t}{q\cdot B}}\right] = \left[\sqrt{\frac{M\cdot(t\cdot V)}{q\cdot V\cdot B}}\right] = \left[\sqrt{\frac{M\cdot r}{F}}\right] =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{M\cdot r}{Ma}}\right] = \left[\sqrt{\frac{r}{r/t^2}}\right] = [t] \checkmark$$