חשמל ומגנטיות - תרגול 1

חוק קולון : $\vec{F} = K\frac{Q_1Q_2}{r^2}\hat{r}$,

פעמים רבות נח להשתמש בו בצורה :

הכוח הפועל על מטען Q_1 ע"י מטען Q_2 :

$$\vec{F} = \frac{KQ_1Q_2}{\|\vec{r}_1-\vec{r}_2\|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

שימו לב לדמיון שבין הכוח הקולומבי לכוח הגרביטציוני

$$F_{colomb} = K\frac{Q_1Q_2}{r^2} \qquad F_{Gravity} = -G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

נשים לב שמטען מוגדרים ב- Colomb ומכאן נוכל לקבל את היחידות של K :

$$[K] = \frac{[F]}{[Q^2/r^2]} = \frac{N\cdot m^2}{col^2}$$

מספר טורי טיילור שימושיים ! (עבור $X \ll 1$)

$$\exp(X) \cong 1+X+\frac{1}{2}X^2+\dots \qquad \ln(1+X) \cong X-\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{3}X^3$$

$$\sin(X) \cong X-\frac{1}{6}X^3+\dots \ , \quad \cos(X) \cong 1-\frac{1}{2}X^2+\dots$$

$$(1+X)^n \cong 1+nX+\frac{1}{2}n(n-1)X^2+\dots$$

$$(1-X)^{-1} \cong 1+X+X^2+X^3+\dots \qquad (1+X)^{-1} \cong 1-X+X^2-X^3+\dots$$

$$(1+X)^{1/2} \cong 1+\frac{X}{2}-\frac{1}{8}X^2+\dots \qquad (1+X)^{-1/2} \cong 1-\frac{X}{2}+\frac{3}{8}X^2+\dots$$

חשמל ומגנטיות - מטלה 1

שאלה 1

מטען Q ומטען $4Q$ מרוחקים זה מזה מרחק L. ($Q>0$)

א. האם ניתן למקם מטען $q>0$ כך ששקול הכוחות עליו יהיה 0?
אם כן היכן נמצאת נקודת שיווי המשקל?

ב. האם הנקודה יציבה?

ג. מה קורה עבור מטען שלילי $-q$?

א. נסמן ב-$(0,0)$ את מיקום המטען Q וב-$(L,0)$ את מיקום $4Q$.
בשלב הראשון נניח כי q ממוקם במיקום (x,y). מכאן:

$$\vec{F}_Q = \frac{KQq}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x\hat{x}+y\hat{y}) \quad , \quad \vec{F}_{4Q} = \frac{4KQq}{[(L-x)^2+y^2]^{3/2}}\cdot[(x-L)\hat{x}+y\hat{y}]$$

- קל לראות כי בכיוון y, הכוח הפועל משני המטענים זהה בכיוונו, לכן הפתרון היחיד יתקבל עבור $y=0$.
- בנוסף, נוכל להסיק כי אם $x<0$ או $L<x$ אזי התרומה של שני הכוחות היא באותו כיוון, לכן $0<x<L$ ונסיק:

$$\vec{F}_Q = \frac{KQq}{x^2}\hat{x} \qquad \vec{F}_{4Q} = -\frac{4KQq}{(L-x)^2}\hat{x}$$

וכדי ששקול הכוחות יהיה 0, נדרוש:

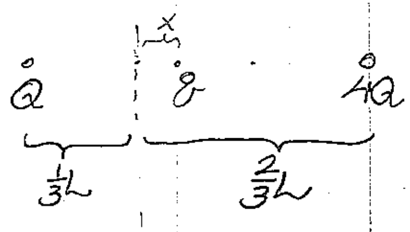
$$\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(L-x)^2} \Rightarrow \ldots$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{L-x} \rightarrow L-x = 2x \Rightarrow x = \frac{L}{3}$$

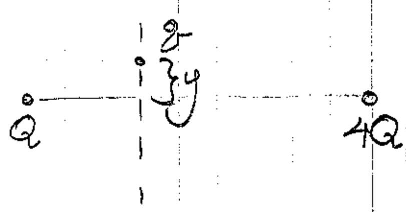
נבדוק שאנחנו צודקים:

אם $x=L/3$ אזי המרחק למטען $4Q$ הוא $\frac{2}{3}L$ כאשר אנחנו מרוחקים פי 2,
המטען גדול פי 4 ולכן הכוח זהה - סביר.

ב. האם הנקודה יציבה :



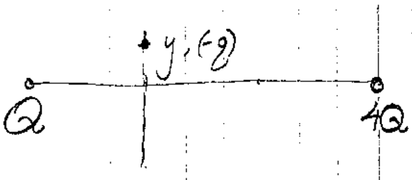
נניח הסטה קטנה ב-X : המטען קרוב יותר לאחד משני המטענים ונדחה ממנו ביתר עוצמה, זה מחזיר אותו חזרה לנקודה המקורית.



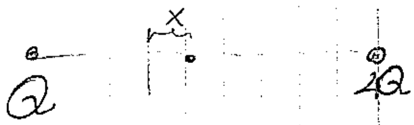
נניח הסטה קטנה ב-y : עכשיו המטען נדחה משני המטענים ולכן הכוח פועל להגדיל את y מכאן שהנקודה אינה יציבה.

עכשיו אם כן נקודת ש"מ $X=\frac{1}{3}L$ אינה יציבה לתנועות בציר y.

ג. נניח עכשיו $0<q$. דבר לא ישתנה במרחק נקודת שיווי המשקל ועדיין $X=\frac{1}{3}L$ תהיה נקודת שיווי המשקל. נבדוק האם הנקודה יציבה.

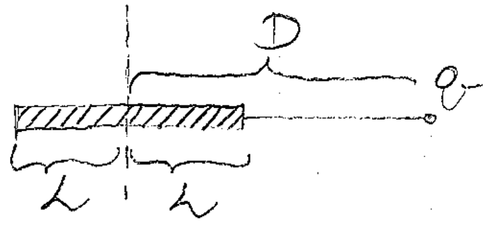


הפעם הסטה ב-y תתוקן ע"י המטענים האחרים שימשכו את $(-q)$ חזרה אל הציר $y=0$.



לעומת זאת הסטה בציר ה-x לא תתוקן, המטען יימשך אל המטען הקרוב אליו ביתר עוצמה.

שאלה 2



נתון מוט טעון באורך 2L שמרכזו בראשית הצירים. הצפיפות האורכית של המוט הוא $\lambda(x) = \lambda_0\left(\frac{x}{L}\right)$.
במרחק D מראשית הצירים, בהמשך לציר המוט, מונח מטען q.

א. מצאו ביטוי כללי לכוח הפועל על q.

ב. בדוק את התוצאה בגבול $\delta \equiv D-L \ll L$

ג. " " " $D \gg L$

א.

$$dF = \frac{Kq\lambda(x)dx}{(D-x)^2}\cdot\hat{x} \Rightarrow F = \int_{-L}^{L}\frac{Kq\lambda(x)}{(D-x)^2}\hat{x}\,dx$$

$$F = \frac{Kq\lambda_0}{L}\int_{-L}^{L}\frac{x}{(D-x)^2}dx\cdot\hat{x} = \dots$$

$$\dots = \frac{Kq\lambda_0}{L}\hat{x}\left[\frac{x}{D-x}\Big|_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L}\frac{1}{D-x}dx\right] = \frac{Kq\lambda_0}{L}\hat{x}\left[\frac{x}{D-x}+\log(D-x)\Big|_{-L}^{L}\right]$$

$$\dots = \frac{Kq\lambda_0}{L}\left[\frac{L}{D-L}+\frac{L}{D+L}+\log\left(\frac{D-L}{D+L}\right)\right]\hat{x}$$

מקבלים בסה"כ: $$\boxed{\vec{F} = \frac{Kq\lambda_0}{L}\left[\frac{2DL}{D^2-L^2}-\log\left(1+\frac{2L}{D-L}\right)\right]\hat{x}}$$

ב. נציב $D=L+\delta$ כאשר $\delta \ll L$!

$$\vec{F} = \frac{Kq\lambda_0}{L}\left[\frac{2L(L+\delta)}{L^2+2L\delta+\delta^2-L^2}-\log\left(1+\frac{2L}{\delta}\right)\right] = \dots$$

$$\frac{Kq\lambda_0}{L}\left[\frac{2L(L+\delta)}{\delta(2L+\delta)}+\log\left(1+\frac{2L}{\delta}\right)\right] \cong \frac{Kq\lambda_0}{L}\left[\frac{L}{\delta}+\log\left(\frac{2L}{\delta}\right)\right]$$

$$\cong \frac{Kq\lambda_0}{\delta}\hat{x}$$

הסבר אינטואיטיבי, קטע בעל מטען כולל $\lambda_0\delta$ נמצא במרחק δ

ד.

$$\vec{F} = \frac{Kq\lambda_0}{L}\left[\frac{2DL}{D^2-L^2} - \log\left(1+\frac{2L}{D-L}\right)\right] \cong$$

$$\frac{Kq\lambda_0}{L}\left[\frac{2L}{D(1-(\frac{L}{D})^2)} - \log\left(1+\frac{2L}{D-L}\right)\right] = \left|\begin{array}{l}\frac{1}{1-\delta^2} \cong 1+\delta^2 \\ \log(1+\delta) = \delta - \frac{1}{2}\delta^2\end{array}\right.$$

$$\frac{Kq\lambda_0}{L}\left[\frac{2L}{D}\left(1+\left(\frac{L}{D}\right)^2\right) - \frac{2L}{D-L} + \frac{1}{2}\left(\frac{2L}{D-L}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{2L}{D-L}\right)^3\right]$$

$$\frac{Kq\lambda_0}{L}\left[\frac{2L}{D} + \frac{2L^3}{D^3} - \frac{2L}{D(1-\frac{L}{D})} + \frac{2L^2}{D^2-2LD+L^2} - \frac{8L^3}{3D^3}\left(\frac{1}{1-\frac{L}{D}}\right)^3\right]$$

$$\frac{Kq\lambda_0}{L}\left[\frac{2L}{D} + \frac{2L^3}{D^3} - \frac{2L}{D}\left(1-\frac{L}{D}\right)^{-1} + \frac{2L^2}{D^2}\left(1-\frac{2L}{D}+\frac{L^2}{D^2}\right)^{-1} - \frac{8L^3}{3D^3}\left(1-\frac{3L}{D}\right)\right]$$

$$(1+\delta)^{-1} = 1-\delta+\delta^2-\delta^3+\delta^4 \dots \longrightarrow$$

עד סדר III ב- $\left(\frac{L}{D}\right)$:

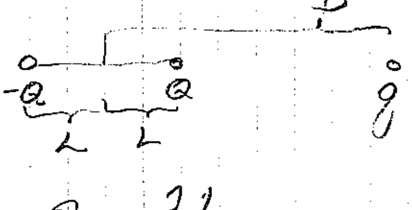
$$\vec{F} = \frac{Kq\lambda_0}{L}\left[\frac{2L}{D} + \frac{2L^3}{D^3} - \frac{2L}{D}\left(1+\frac{L}{D}+\left(\frac{L}{D}\right)^2\right) + \frac{2L^2}{D^2}\left(1+\frac{2L}{D}\right) - \frac{8L^3}{3D^3}\right]$$

$$\frac{Kq\lambda_0}{L}\left[\frac{2L}{D} + \frac{2L^3}{D^3} - \frac{2L}{D} - \frac{2L^2}{D^2} - \frac{2L^3}{D^3} + \frac{2L^2}{D^2} + \frac{4L^3}{D^3} - \frac{8L^3}{3D^3}\right]$$

$$\frac{Kq\lambda_0}{L}\frac{L^3}{D^3}\left(4-\frac{8}{3}\right) = \frac{4Kq\lambda_0 L^2}{3D^3}$$

נפרש כי הכוח שמפעילים שני מטענים Q ו- $-Q$ המרוחקים $2L$ זה מזה

ומרכזם בראשית, על מטען q המרחק D מהראשית — בדיוק כזה

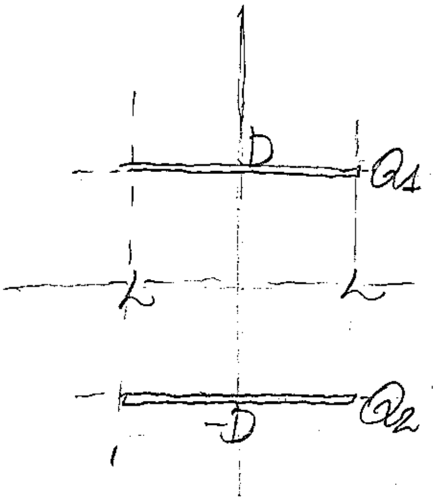


הוא $F = 4\frac{KqQL}{D^3}$

כאשר הקונפיגורציה של מוט שקולה לזו של

$Q = \frac{\lambda_0 L}{3}$ שני מטענים נקודתיים המרוכזים בקצוות המוט

שאלה 3



שני מוטות שאורך כל אחד מהם $2L$
מונחים במרחק $2D$ זה מזה.
המוטות טעונים במטענים Q_1 ו-Q_2
חשב את הכוח הפועל בין שני המוטות

נגדיר: $\lambda_i = \frac{Q_i}{2L}$

נחשב כעת את הכוח הפועל על אלמנט במוט 1 ע"י אלמנט במוט 2
המיקומים הם: (x_1,D) ו-$(x_2,-D)$ והאורכים dx_1 ו-dx_2 וכך

$$dF = \frac{K\cdot(\lambda_1 dx_1)\cdot(\lambda_2 dx_2)}{\left((2D)^2+(x_2-x_1)^2\right)^{3/2}}\cdot\left[(2D)\hat{y}+(x_1-x_2)\hat{x}\right]$$

נצפה שבין המוטות יפעל רק כוח בכיוון $\hat{y}$ ולכן נעבור לאינטגרציה:

$$F = \int_{-L}^{L}dx_1\int_{-L}^{L}dx_2\cdot\left(\frac{K\lambda_1\lambda_2}{\left[(2D)^2+(x_2-x_1)^2\right]^{3/2}}\cdot 2D\right)\hat{y} =$$

$$\frac{K\lambda_1\lambda_2}{4D^2}\int_{-L}^{L}dx_1\int_{-L}^{L}dx_2\cdot\left[\frac{1}{\left(1+\left(\frac{x_2-x_1}{2D}\right)^2\right)^{3/2}}\right]\hat{y}$$

נגדיר משתנה חדש $x_0=x_2-x_1$ וכך המקום האינטגרל על x_2 נקבל.

$$\frac{K\lambda_1\lambda_2}{4D^2}\int_{-L}^{L}dx_1\int_{-L-x_1}^{L-x_1}dx_0\frac{1}{\left(1+\left(\frac{x_0}{2D}\right)^2\right)^{3/2}}\hat{y}$$

עם האינטגרל הזה אנחנו יודעים להתמודד!

$$\frac{x_0}{2D} = \tan(\theta)$$

$$\Downarrow \quad dx_0 = 2D\cos^{-2}(\theta)d\theta, \quad \theta = \arctan\left(\frac{x_0}{2D}\right) \quad \left(1+\left(\frac{x_0}{2D}\right)^2\right)^{-3/2} = \cos^3\theta$$

$$F=\frac{K\lambda_1\lambda_2}{4D^2}\cdot\int_{-L}^{L}dx_1\int_{\arctan\left(\frac{-L-x_1}{2D}\right)}^{\arctan\left(\frac{L-x_1}{2D}\right)}d\theta\cdot 2D\cos^{-2}(\theta)\cdot\cos^3\theta=$$

$$\frac{K\lambda_1\lambda_2}{2D}\int_{-L}^{L}dx_1\int_{\arctan\left(\frac{-L-x_1}{2D}\right)}^{\arctan\left(\frac{L-x_1}{2D}\right)}d\theta\,\cos\theta=$$

$$\frac{K\lambda_1\lambda_2}{2D}\int_{-L}^{L}dx_1\left[\sin\left(\arctan\left(\frac{L-x_1}{2D}\right)\right)-\sin\left(\arctan\left(\frac{-L-x_1}{2D}\right)\right)\right]$$

טענה:

$$\sin(\arctan(Z))=\frac{Z}{\sqrt{1+Z^2}}$$

הוכחה: נסמן

$$T=\arctan(Z)$$
$$Z=\tan(T)$$

ובכן הטענה היא כי

$$\sin(T)=\frac{\tan(T)}{\sqrt{1+\tan^2(T)}}$$

אז נכון שכן!

$$\frac{\tan(T)}{\sqrt{1+\tan^2(T)}}=\frac{\tan(T)}{\sqrt{\cos^{-2}(T)}}=\tan(T)\cdot\cos(T)=\sin(T)$$

לפיכך האינטגרל ניתן לפשטו מאוד!

$$F=\frac{K\lambda_1\lambda_2}{2D}\int_{-L}^{L}dx_1\left[\frac{\left(\frac{L-x_1}{2D}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{L-x_1}{2D}\right)^2}}-\frac{\left(\frac{-L-x_1}{2D}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{-L-x_1}{2D}\right)^2}}\right]=$$

$$\frac{K\lambda_1\lambda_2}{2D}\int_{-L}^{L}dx_1\left(\frac{L-x_1}{\sqrt{4D^2+(L-x_1)^2}}+\frac{L+x_1}{\sqrt{4D^2+(L+x_1)^2}}\right)$$

$$= \frac{K\lambda_1\lambda_2}{2D}\left[\underbrace{\int_{-L}^{L} dx_1 \frac{L-x_1}{\sqrt{4D^2+(L-x_1)^2}}}_{\text{החלפת משתנים 1. } L-x_1=z} + \underbrace{\int_{-L}^{L} dx_1 \frac{L+x_1}{\sqrt{4D^2+(L+x_1)^2}}}_{\text{החלפת משתנים 1. } L+x_1=z}\right]$$

$$F = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{2D}\left[\int_0^{2L} dz \frac{z}{\sqrt{4D^2+z^2}} + \int_0^{2L} dz \frac{z}{\sqrt{4D^2+z^2}}\right]$$

שים לב כי

$$\int_0^{2L} dz \frac{z}{\sqrt{4D^2+z^2}} \overset{u=z^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^{(2L)^2} \frac{du}{\sqrt{4D^2+u}} \overset{V=u+4D^2}{=} \frac{1}{2}\int_{4D^2}^{4(D^2+L^2)} \frac{dV}{\sqrt{V}} = \sqrt{V}\Big|_{4D^2}^{4D^2+4L^2}$$

$$= 2\left(\sqrt{D^2+L^2} - \sqrt{D^2}\right) \rightarrow$$

$$F = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{2D}\cdot 4\left[\sqrt{D^2+L^2} - D\right] =$$

$$\frac{K(\lambda_1\cdot 2L)\cdot(\lambda_2\cdot 2L)}{2D\cdot L^2}\left[D\cdot\left(\sqrt{1+\left(\frac{L}{D}\right)^2} - 1\right)\right]$$

$$\frac{KQ_1Q_2}{2L^2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{L}{D}\right)^2} - 1\right)$$

$$\boxed{F = \frac{KQ_1Q_2}{2L^2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{L}{D}\right)^2} - 1\right)}$$

נראה שאת התוצאה הזו סבירה.

במקרה $D \gg L$

$$F = \frac{KQ_1Q_2}{2L^2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{L}{D}\right)^2} - 1\right] \cong \frac{KQ_1Q_2}{2L^2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{L}{D}\right)^2 - 1\right]$$

$$= \frac{KQ_1Q_2}{2L^2} \cdot \frac{L^2}{2D^2} \Rightarrow F \cong \frac{KQ_1Q_2}{4D^2}$$

נא שים לב שהמקורות הם מוטות ומרחוק הם מתנהגים כמו שתי נקודות

במקרה $D \ll L$

$$F = \frac{KQ_1Q_2}{2L^2} \cdot \left[\frac{L}{D}\sqrt{1+\left(\frac{D}{L}\right)^2} - 1\right] \cong \ldots$$

$$\frac{KQ_1Q_2}{2L^2} \cdot \frac{L}{D} \Rightarrow F \cong \frac{KQ_1Q_2}{2DL}$$

את המקרה הזה מסובך יותר להבין.
כדי להבין את המקרה הזה ניתן לחשוב על זה כעל המון קטעים בעלי אורך D המושכים זה את זה.

מטען כל קטע $Q_i\left(\frac{D}{L}\right)$ ומרחקו מהדבר שאיתו הוא מושך $2D$ ורק

מטען הקטע מהמוט העליון ; מטען הקטע מהמוט התחתון

$$F \sim \frac{K\, Q_1\left(\frac{D}{L}\right) \cdot Q_2\left(\frac{D}{L}\right)}{(2D)^2} \cdot \frac{L}{D} \sim \frac{KQ_1Q_2}{DL}$$

המרחק בין המוטות ; מספר הקטעים