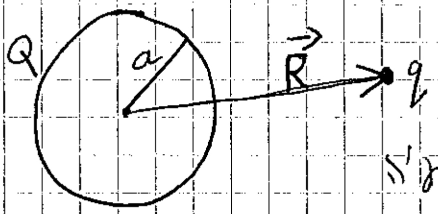
חשמל אנליטי - תרגיל 4

(I) מטען נקודתי q בקרבת כדור מוליך הטעון במטען כולל Q, במרחק R ממרכז הכדור, שרדיוסו הוא a.



בעבר, פתרתם בעזרת שיטת הדמויות את הבעיה של מטען נקודתי q ליד כדור מוארק ונייטרלי.

מצאתם שהפוטנציאל הכולל מחוץ לכדור הינו:

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{R}|} - \frac{\frac{a}{R}q}{\left|\vec{r}-\frac{a^2}{R^2}\vec{R}\right|}}$$

פוטנציאל זה נגרם ע"י מטען דמות $q' = -\frac{a}{R}q$ שנמצא במיקום $\vec{R}' = \frac{a^2}{R^2}\vec{R}$.

למעשה, הפוטנציאל נגרם מצפיפות מטען לא טריוויאלית המושרית על הכדור בגלל נוכחות המטען הנקודתי.

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left(E_r\Big|_{r\to a^+} - E_r\Big|_{r\to a^-}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{r=a} - 0\right)$$

(השדה בתוך הכדור מתאפס זהותית)

$$\boxed{\sigma_{(\hat{r})}} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{r=a} = \boxed{\frac{-q}{4\pi a^2}\cdot\left(\frac{a}{R}\right)\frac{1-\frac{a^2}{R^2}}{\left(1+\frac{a^2}{R^2}-2\frac{a}{R}\cos\gamma\right)^{3/2}}} \Leftarrow$$

כאשר γ היא הזווית בין $\hat{r}$ לבין $\vec{R}$ ($\hat{r}$ הוא וקטור על פני הכדור).

אם המטען q נמצא על ציר $\hat{z}$, אז $\gamma = \theta$ כאשר θ היא הזווית הפולארית הסטנדרטית.

התפלגות המטען הנוצרת, שנותנת (ע"י אינטגרל ע"פ פני השטח של הכדור) מטען כולל q', מבטלת את הכוח על המטענים החופשיים בכדור הנגרמים בעקבות q.

כעת, אם הכדור עצמו טעון במטען כולל Q, עדיין נצטרך q' שיתפזר כמו שכתבנו למעלה כדי ליצור שיווי משקל.
יתר המטען $(Q-q')$ יתפזר בצורה אחידה על פני הכדור, וייראה (לנקודה מחוץ לכדור) כאילו הוא מרוכז במרכז הכדור.
לכן, הפוטנציאל הכולל מחוץ לכדור יהיה:

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{R}|} - \frac{\frac{a}{R}q}{|\vec{r} - \frac{a^2}{R^2}\vec{R}|} + \frac{Q+\frac{a}{R}q}{|\vec{r}|}}$$

הכוח שפועל על המטען q הינו:

$$\vec{F} = \frac{q\cdot(Q-q')}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} + \frac{q\cdot q'}{|\vec{R}-\vec{R}'|^2}\cdot\frac{\vec{R}}{R} = \left[\frac{qQ}{R^2} - \frac{\frac{a}{R}q^2}{R^2} + \frac{\frac{a}{R}q^2}{(R-\frac{a^2}{R})^2}\right]\frac{\vec{R}}{R}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{q}{R^2}\left[Q - \frac{q a^3(2R^2-a^2)}{R(R^2-a^2)^2}\right]\frac{\vec{R}}{R}}$$

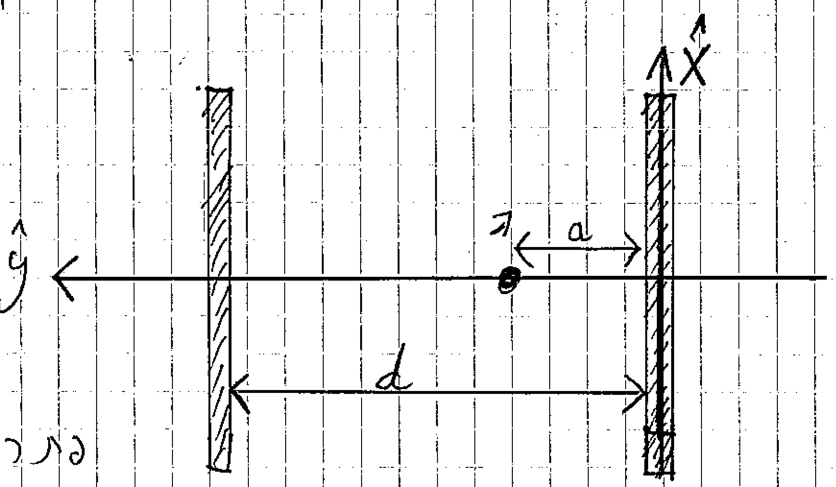
- עבור $a \ll R$ מקבלים, כצפוי, $\vec{F} = \frac{qQ}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}$.
- אם $q\cdot Q<0$ (Q בסימן הפוך ל-q) אז מקבלים כוח <u>מושך</u> בכל מרחק מהכדור
- מה שמעניין הוא שאם Q ו-q שווי סימן, הכוח אומנם דוחה במרחקים גדולים, אך <u>מושך</u> במרחקים קצרים, שם <u>השפעתו</u> של מטען הדמות גדולה ממטען הכדור.

II הפרדת משתנים

נתונה הבעיה הדו מימדית הבאה:
שני משטחים מוליכים, אינסופיים ומוארקים נמצאים במרחק d זה מזה. תיל אינסופי הטעון באופן אחיד, בצפיפות מטען אורכית λ, נמצא במרחק a מאחד הלוחות.

מצאו את הפוטנציאל בין הלוחות בשיטת הפרדת משתנים.

⇓



פתרו את משוואות לפלס בנפרד עבור $x>0$ ו- $x<0$, ולאחר מכן השתמשו בתנאי השפה והתכונות הרציפות ואי הרציפות של הפוטנציאל והשדה החשמלי ב- $x=0$.
הניחו שהפוטנציאל ב- ∞ מתאפס!

⟸ נעבוד בקורדינטות קרטזיות (x,y).
פרט לנקודה $(0,a)$, אין מטענים בין הלוחות, ולכן מתקיימת משוואת לפלס עבור $x>0$ ו- $x<0$ בנפרד.

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 .$$

ננסה פתרון מהצורה $\phi(x,y) = X(x)Y(y)$. נציב במשוואה, ונחלק ב- $X\cdot Y$ כדי לקבל:

$$\boxed{\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}}$$

אגף שמאל תלוי רק ב- x ואגף ימין תלוי רק ב- y ולכן נסיק שכל אגף שווה לקבוע.

וכך נקבל:

$$X'' - k^2 X = 0, \quad Y'' + k^2 Y = 0$$

כלומר:

$$\boxed{\begin{aligned} X(x) &= Ae^{kx} + Be^{-kx} \\ Y(y) &= C\sin(ky) + D\cos(ky) \end{aligned}}$$

מתנאי השפה:

$$Y(y=0) = Y(y=d) = 0$$

וכך נסיק:

$$\boxed{D = 0, \quad k = \frac{n\pi}{d}, \quad n \in \mathbb{Z}}$$

מהדרישה להתאפסות ב- $x \to \pm\infty$ $\Rightarrow$ $X(x \to \pm\infty) = 0$

ונקבל שני פתרונות שונים עבור $x>0$ ועבור $x<0$

עבור $x>0$, $A=0$

עבור $x<0$, $B=0$

הפתרון הכולל הוא:

$$\boxed{\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = \begin{cases} \phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{n\pi x}{d}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right), & x>0 \\ \phi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\frac{n\pi x}{d}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right) & x<0 \end{cases}}$$

הפוטנציאל חייב להיות רציף ב- $x=0$, ולכן נקבל:

$$\phi_1(x=0) = \phi_2(x=0) \Longrightarrow \boxed{A_n = B_n \quad \text{לכל } n}$$

נותר למצוא את המקדמים A_n ונעשה זאת מתוך ידיעת המטען של התיל במרחק a מהמישור הימני.

במשטח $x=0$ (משטח אי-הרציפות) יש צפיפות מטען משטחית

$$\boxed{\sigma(y) = \lambda\delta(y-a)}$$

מתוך הרכיב הניצב של השדה החשמלי ותנאי אי-הרציפות שלו מקבלים:

$$\lambda\delta(y-a)=\sigma(y)=\frac{1}{4\pi}\left(E_{1x}-E_{2x}\right)\Big|_{x=0}=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}-\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\right)\Big|_{x=0}=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n\pi}{d}A_n e^{-\frac{n\pi x}{d}}\sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right)\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{d}A_n e^{\frac{n\pi x}{d}}\sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right)\right)\right]_{x=0}$$

$$=\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2d}A_n\sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right)=\lambda\delta(y-a)}$$

$$\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2d}A_n\int_0^d\sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right)\cdot\sin\left(\frac{m\pi y}{d}\right)dy=\lambda\int_0^d\delta(y-a)\cdot\sin\left(\frac{m\pi y}{d}\right)dy$$

$$\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nA_n}{2d}\cdot\left(\frac{1}{2}d\,\delta_{n,m}\right)=\lambda\cdot\sin\left(\frac{m\pi a}{d}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{mA_m}{4}=\lambda\sin\left(\frac{m\pi a}{d}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A_m=\frac{4\lambda}{m}\sin\left(\frac{n\pi a}{d}\right)}$$

והפתרון הכללי:

$$\phi(x>0,y)=4\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{d}\right)\cdot e^{-\frac{n\pi x}{d}}\cdot\sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right)$$

$$\phi(x<0,y)=4\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{d}\right)e^{\frac{n\pi x}{d}}\cdot\sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\phi(x,y)=4\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{d}\right)\cdot e^{-\frac{n\pi|x|}{d}}\cdot\sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right)}$$