חשמל ומגנטיות - תרגול 11

שדה מגנטי וחוק אמפר

תזכורת:

השדה המגנטי הינו השדה הוקטורי $\bar{B}$ שעבורו הכח הפועל על חלקיק טעון במטען q ובעל מהירות $\bar{v}$הינו :

$$\bar{F} = q\bar{v} \times \bar{B} + q\bar{E}$$

היחידות של השדה המגנטי נקראות טסלה (Tesla).

השדה המגנטי נוצר עקב תנועה של מטענים. דוגמא בסיסית הינה השדה המגנטי הנוצר ע"י תיל מוליך ארוך בו זורם זרם I:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

כאשר r הינו המרחק מהתיל ו- $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{T\cdot m}{A}$ נקרא **קבוע הפרמביליות של הריק**. הנחנו שהזרם זורם בכיוון $\hat{z}$.

האינטגרל הקווי לאורך מסילה סגורה של השדה המגנטי תלוי בכמות הזרם העובר דרך המשטח המוגדר על ידי המסילה:

$$\oint \bar{B}d\bar{l} = \mu_0 I_{in}$$

משוואה זו, בדומה לחוק גאוס, שימושית בעיקר כאשר ניתן לנצל סימטריה מסויימת של המערכת, כלומר - לבחור מסילה עליה אגף שמאל יהיה קל לחישוב.

ע"י משפט סטוקס ניתן לקבל קשר דיפרנציאלי בין השדה המגנטי לבין צפיפות הזרם, הנקרא **חוק אמפר**:

$$\begin{gathered}\oint \bar{B}d\bar{l} = \mu_0 \iint \bar{J}\cdot d\bar{S}\\ \oint \bar{B}d\bar{l} = \iint \bar{\nabla}\times\bar{B}d\bar{S}\\ \iint \bar{\nabla}\times\bar{B}d\bar{S} = \mu_0 \iint \bar{J}\cdot d\bar{S}\end{gathered}$$

כאשר כל האינטגרלים המשטחיים הם על השטח הכלוא בלולאה.מכיוון שזה נכון לכל לולאה שנבחר,

$$\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0 \bar{J}$$

משוואה זו לא מגדירה את השדה המגנטי באופן יחיד, כי תמיד נוכל להוסיף לו גראדיינט של פונקציה כלשהי, שהרוטור שלו הוא אפס, והמשוואה תתקיים. משוואה נוספת אשר

באמצעותה מקבלים יחידות היא:

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{B}=0$$

זו משוואה אמפירית, שאומרת שאין מטען, או מונופול, מגנטי. עניין זה הוא הבסיס לדיונים תיאורטיים מעניינים שתתקלו בהם להמשך לימודיכם.
התאפסות הדיברגנס של $\bar{B}$ רומזת שקיימת פונקציה וקטורית $\bar{A}$ שעבורה

$$\bar{B}=\nabla\times\bar{A}$$

$\bar{A}$ נקרא **הפוטנציאל הוקטורי**. נשים לב שתמיד נוכל להוסיף ל-$\bar{A}$ גראדיינט של פונקציה $\nabla\phi$ מבלי לשנות את B (שוב, כי הרוטור של גראדיינט הוא אפס). פונקציה כזו נקראת **פונקציית כיול**. חופש הכיול הינו מרכיב חשוב בפיתוח של תורות רבות בפיסיקה.

דוגמאות:

דוגמא 1: שני תיילים

שני תיילים אינסופיים מרוחקים מרחק d זה מזה ונושאים זרם I בכיוון זהה.

1. מצא את השדה המגנטי בכל המרחב.
2. מהו השדה בנקודה שמרחקה מהתיילים גדול בהרבה מהמרחק שבין התיילים?
3. מה קורה אם כיווני הזרמים הפוכים במקום זהים?

פתרון:

1. נמקם את התיילים בנקודות $\pm d\hat{x}$, מקבילים לציר z. עבור נקודה כללית במישור xy (יש סימטריה להזזה בכיוון z) המרחק מהתיילים הוא:

$$r_{\pm}^2=(x\pm d/2)^2+y^2$$

השדות של התיילים בנקודה:

$$\bar{B}_{\pm}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{-y\hat{x}}{r_{\pm}^2}+\frac{(x\pm 0.5d)\hat{y}}{r_{\pm}^2}\right)$$

השדה הכולל:

$$\bar{B}=\bar{B}_{+}+\bar{B}_{-}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(-y\hat{x}\left(\frac{1}{r_+^2}+\frac{1}{r_-^2}\right)+x\hat{y}\left(\frac{1}{r_+^2}+\frac{1}{r_-^2}\right)+0.5d\hat{y}\left(\frac{1}{r_+^2}-\frac{1}{r_-^2}\right)\right)$$

למשל, בנקודה הנמצאת על ציר y, השדה כולו מכוון בכיוון x. בנקודה על ציר x השדה הוא בכיוון y בלבד.

2. כעת, אם $\sqrt{x^2+y^2}\gg d$ (יותר מדוייק, או ש-$|x|\gg d$ או ש- $|y|\gg d$ או שניהם) , אז

$$\frac{1}{r_{\pm}^2}=\frac{1}{(x\pm d/2)^2+y^2}=\frac{1}{x^2+y^2+0.25d^2\pm xd}\approx\frac{1}{(x^2+y^2)}\left(1\mp\frac{xd}{x^2+y^2}\right)$$

בקירוב המוביל השדה הינו:

$$\bar{B} \approx 2\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{-y\hat{x}+x\hat{y}}{x^2+y^2}$$

שזה פעמיים השדה של תייל אחד שנמצא בראשית - הגיוני. על ציר x למשל, השדה נופל כמו חזקה ראשונה של x.

3. אם הזרמים הפוכים בכיוונם, יש צורך במספר שינויי סימן בשדה:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(-y\hat{x}\left(\frac{1}{r_+^2}-\frac{1}{r_-^2}\right)+x\hat{y}\left(\frac{1}{r_+^2}-\frac{1}{r_-^2}\right)+0.5d\hat{y}\left(\frac{1}{r_+^2}+\frac{1}{r_-^2}\right)\right)$$

הנחנו כאן שבתייל שנמצא בכיוון החיובי של x זורם זרם בכיוון השלילי של z. כעת, בקירוב מוביל,

$$\bar{B} \approx 2\frac{\mu_0 I d}{2\pi\left(x^2+y^2\right)}\left(\left(-\frac{x^2}{x^2+y^2}+0.5\right)\hat{y}+\frac{xy}{x^2+y^2}\hat{x}\right)$$

הפעם, על ציר x רחוק מאוד מהראשית למשל, השדה נופל כמו x בחזקה שניה.

דוגמא 2:

נתון גליל מוליך באורך L ורדיוס a. המוליכות כפונקציה של המרחק מציר הגליל נתונה ע"י

$$\sigma = \sigma_0 e^{-r/a}$$

בין שני בסיסי הגליל מופעל הפרש מתחים V, ומתקבלת זרימה סטציונרית.
א. מצאו את צפיפות הזרם כפונקציה של r.
ב. חשבו את הזרם הכולל ואת התנגדות הגליל.
חשבו את השדה המגנטי בכל המרחב, בהנחה שהגליל ארוך מאוד ביחס לרדיוסו.

פתרון:

א. כמו שראינו לפני מספר שעורים, במוליך מתקיים

$$E = \frac{V}{L}$$

וחוק אוהם אומר:

$$J = \sigma E = \frac{\sigma_0 V}{L}e^{-r/a}$$

וכיוונו מההדק החיובי לעבר השלילי.
הזרם הכולל:

$$I = \iint \bar{J}d\bar{S} = \frac{2\pi\sigma_0 V}{L}\int_0^a drre^{-r/a} = -\frac{2\pi\sigma_0 Va}{L}(a+r)e^{-r/a}|_0^a = \frac{2\pi\sigma_0 Va}{L}(a-\frac{2}{e}a) = \frac{2\pi\sigma_0 Va^2}{L}\left(1-\frac{2}{e}\right)$$

ההתנגדות:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{L}{2\pi\sigma_0 a^2}\frac{e}{e-2}$$

השדה המגנטי: בזכות הסימטריה הגלילית, נוכל להניח שהשדה אחיד על פני טבעות המקיפות את ציר הגליל. מחוק אמפר (בתוך הגליל):

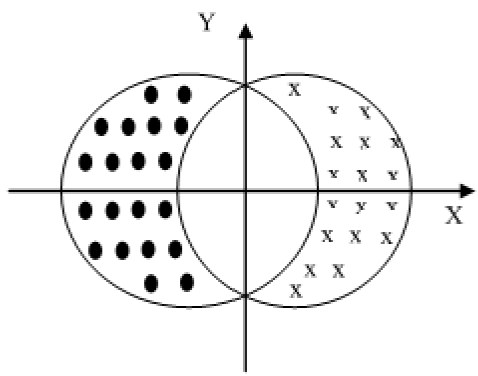
$$2\pi r B = \mu_0 2\pi \int_0^r dr' r' e^{-r'/a} = \frac{2\pi\mu_0\sigma_0 V a}{L}\left(a-(a+r)e^{-r/a}\right) \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0\sigma_0 V a}{Lr}\left(a-(a+r)e^{-r/a}\right)\hat{\theta}$$

זה נכון בתוך הגליל. מחוץ לגליל, ההבדל הוא רק הגבול העליון של האינטגרציה:

$$2\pi r B = \mu_0 2\pi \int_0^a dr' r' e^{-r'/a} = \mu_0 I = \frac{2\pi\mu_0\sigma_0 V a^2}{Lr}\left(1-\frac{2}{e}\right) \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0\sigma_0 V a^2}{Lr}\left(1-\frac{2}{e}\right)\hat{\theta}$$

דוגמא 3 (2009 מועד ב)::

נתונים שני גלילים חופפים חלקית שצירם מקביל לציר Z. רדיוס הגלילים הוא R והמרחק בין מרכזיהם הינו d, $0 < d < 2R$. באזור החפיפה של הגלילים אין זרם. בנפח שאינו באזור החפיפה ישנה צפיפות זרם אחידה, $J\hat{z}$ בשמאלי ו־ $-J\hat{z}$ בימני. יש לחשב את השדה המגנטי באזור החפיפה.



פתרון:

1. שיטה: סופרפוזיציה של שני שדות מגנטיים הנובעים מזרם אחיד (והפוך בכיוונו) בשני הגלילים – מה שיוצר את היעדר הזרם באיזור שעליו נשאלתם. את השדה של זרם אחיד בגליל נחשב בעזרת חוק אמפר האינטגרלי.

$\int \vec{B}\cdot\vec{dl}=\mu_0 I=\mu_0\int\int \vec{j}\cdot\vec{da}$ במקרה שלנו הסימטריה היא כזו שהשדה של זרם בגליל בודד חייב להיות משיקי (ונגד כיוון השעון עבור זרם בכיוון $\hat{z}$) במישור xy . כלומר $\vec{B}(r)=B(r)\hat{\theta}$ (עבור גליל הממוקם סביב הראשית). ולכן, $\vec{B}(r)=\frac{\mu_0 j r\hat{\theta}}{2}=\frac{\mu_0 j}{2}(-y,x)$ (כאשר r הוא המרחק מציר z ואילו $\hat{\theta}$ הוא ווקטור היחידה משיקי (נגד כיוון השעון במבט על התרשים שבמבחן). שימו לב לכתיבה מפורשת של רכיבי $\hat{\theta}$ (מה שגורם לצמצומו של r בנרמול של $\hat{\theta}$).

כעת עלינו להסיט את השדה הנ"ל להיות סביב $(-d/2,0)$ ולחבר שדה מוסט נוסף עבור הגליל השני (סביב $(d/2,0)$ והפוך בכיוונו) כדי לקבל את הסופרפוזיציה הנדרשת:

$$\boxed{\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2=\frac{\mu_0 j(-y,x+d/2)}{2}+\frac{\mu_0 j(y,-x+d/2)}{2}=\frac{\mu_0 j(0,d)}{2}}$$

הערה להשכלה כללית: השדה האחיד שהתקבל בכיוון $\hat{y}$ משמש במאיצי חלקיקים ויישומים נוספים.

בפתרון הדוגמא הבאה ניעזר בשדה המגנטי בתוך סליל ארוך מאוד (ביחס לרדיוס שלו) עם צפיפות כריכות n. השדה הוא

$$B=\mu_0 In$$

בכיוון מקבלי לציר הסליל (קבוע) וכיוונו נקבע לפי חוק יד ימין, ומחוץ לסליל הוא 0. אתם תראו את החישוב בשעור, אבל רק לשם אינטואיציה: השדה בחוץ מתאפס מכיוון שלולאות השדה המגנטי חייבות להיסגר על עצמן ולהקיף את התיילים נושאי הזרם, ובמקרה זה הן ייסגרו רק באינסוף.

דוגמא 4: מועד ב 2012

לוח מלבני דק שרוחבו $2a$ וגובהו h, $h>>a$, טעון בצפיפות משטחית σ ומסתובב סביב ציר z העובר במרכזו במהירות זוויתית ω.

1. מהו השדה החשמלי הממוצע על סיבוב במישור הניצב לגליל ועובר במרכזו?
2. מהו השדה המגנטי הממוצע על סיבוב?

פתרון:

1. מכיוון שאנו ממצעים על סיבוב מלא, השדה צפוי להיות בעל סימטריה גלילית (רדיאלי). ע"י חוק גאוס ומעטפת גלילית באורך h נמצא את השדה:

$$2\pi rhE=4\pi K2rh\sigma \quad r<a$$
$$2\pi rhE=4\pi K2ah\sigma \quad r>a$$

ומכאן:

$$\bar{E} = \begin{cases} 4K\sigma\hat{r} & r < a \\ 4K\frac{a}{r}\sigma\hat{r} & r > a \end{cases}$$

2. ניתן לחשוב על המערכת כאוסף של סלילים ארוכים אחד בתוך השני. מכאן נסיק שהשדה המגנטי מתאפס עבור רדיוסים גדולים מ־ a. נשתמש בחוק אמפר עבור $r < a$: מסימטריית הבעיה נצפה שהשדה המגנטי יהיה מקביל לציר z. ניקח לולאת אמפר מלבנית במישור המכיל את ציר z, בה אחת הצלעות המקבילות לציר z נמצאת במרחק r ממנו, והשניה נמצאת מחוץ לאזור בו הלוח עובר (רחוק יותר מ־a). הזרם ליחידת שטח הינו $\frac{\sigma\omega}{2\pi}$ (צפיפות המטען כפול התדירות) . מכאן:

$$Bh = \mu_0 h(a-r)\frac{\sigma\omega}{2\pi}$$

$$\bar{B} = \begin{cases} \mu_0(a-r)\frac{\sigma\omega}{2\pi}\hat{z} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

פוטנציאל וקטורי

דוגמא 5:

מהו השדה המגנטי המתקבל מהפוטנציאלים הוקטוריים הבאים:

$$\bar{A}_1 = B_0 x\hat{y} \qquad \bar{A}_1 = -B_0 y\hat{x}$$

פתרון:

$$\bar{B}_1 = \nabla\times\bar{A}_1 = B_0\hat{z} \qquad \bar{B}_2 = \nabla\times\bar{A}_2 = B_0\hat{z}$$

נותנים אותו שדה! גם הפוטנציאל

$$\bar{A}_3 = 0.5B_0(-y, x, 0)$$

יתן את אותו שדה. אפשר לעבור בין הפוטנציאלים הללו ע"י פונקציית כיול. למשל, בין A_1 ל־ A_2:

$$B_0 x\hat{y} + \bar{\nabla}\phi = -B_0 y\hat{x} \Rightarrow \begin{array}{c} \partial_x\phi = -B_0 y \\ \partial_y\phi = -B_0 x \end{array}$$

ומכאן ש־$\phi = -B_0 xy$.

כיול קולון:

תמיד נוכל למצוא פונקציית כיול כך ש־

$$\nabla \cdot \bar{A} = 0$$

נראה זאת: אם $\nabla \cdot \bar{A} \neq 0$, נבחר ϕ כך ש ־

$$\nabla \cdot \bar{A}' = \nabla \cdot \left(\bar{A} + \nabla\phi\right) = 0 \Rightarrow \nabla^2\phi = -\nabla \cdot A$$

כלומר ־ עלינו לפתור את משוואת פואסון עבור ϕ.

שימושים לכיול קולון

אם נציב את הפונטציאל הוקטורי במשוואת אמפר נקבל:

$$\mu_0\vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

ותחת כיול קולון

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

משוואה הזו מזכירה את משוואת פואסון, כאשר במקום מטען שיוצר את הפוטנציאל החשמלי ישנם זרמים שיוצרים את הפונטציאל המגנטי. הלפלסיאן הפועל על פונקציה וקטורית במשוואה זו הוא פשוט הלפלסיאן הסלרי הרגיל רכיב־רכיב, ולכן נוכל למצוא

את רכיבי x, y, z של הפוטנציאל המגנטי בכיול קולון מתוך רכיבי x, y, z של צפיפות הזרם, בדיוק כפי שאנו מוצאים פוטנציאל חשמלי מתוך התפלגות מטען. בדיוק כמו באלקטרוסטטיקה נוכל לכתוב את פתרון המשוואה כסופרפוזיציה:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r'})dV'}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

דוגמא 6:

כריכת זרם מעגלית במישור xy מונחת כך שמרכזה בראשית, וזורם בה זרם I. רדיוסה R.
חשבו את הפוטנציאל הוקטורי בכיול קולון על ציר z.

פתרון:

הפוטנציאל הוקטורי בכיול קולון קשור לוקטור צפיפות הזרם בצורה:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r'})dV'}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{loop} \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

נבצע פרמטריזציה של הבעיה כאשר יש לנו מסילה מעגלית $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ונרשום את הוקטור $\vec{r'} = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$. אז

$$d\vec{r}' = \frac{d\vec{r'}}{d\theta}d\theta = (-R\sin\theta, R\cos\theta, 0)\, d\theta$$

ועבור נקודה על ציר z מתקיים $|\vec{r} - \vec{r'}| = \sqrt{z^2 + R^2}$, ולכן:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(-R\sin\theta, R\cos\theta, 0)\, d\theta}{\sqrt{z^2 + R^2}} = (0, 0, 0)$$