חשמל אנליטי - תרגול 3

נתון גליל אינסופי, מוליך, שצירו הינו ציר $\hat{z}$ ורדיוס a.
במקביל לגליל, במרחק b מצירו $(b>a)$ מונח תיל אינסופי,
בעל צפיפות מטען אורכית λ.

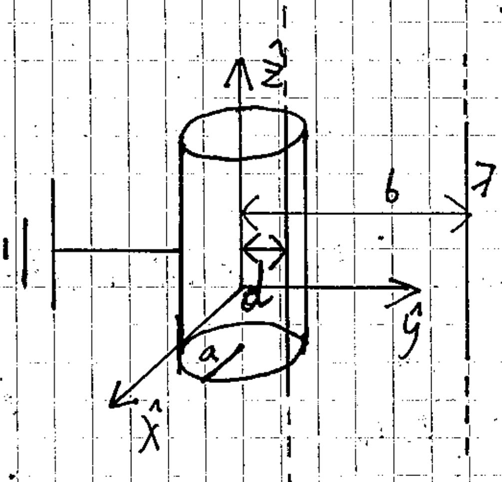
(א) בעזרת שיטת הדמויות מצאו את הפוטנציאל בכל המרחב, כאשר הגליל מוארק.

(ב) מצאו את פונקצית גרין הדו-ממדית המתאימה לבעיה הדו-ממדית המתאימה, והציגו אותה בקואורדינטות קוטביות (r,φ).

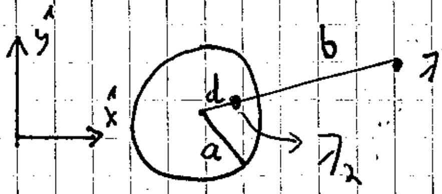
פתרון:

כאמור, בעיה זו היא אפקטיבית דו-ממדית, שכן אין בכלל תלות ב- z. הפתרון (ותנאי השפה) במישור $z=0$ פשוט מועתק לכל $z\neq 0$.

מבט מהצד



מבט מלמעלה



(א) ניתן לחשב את השדה החשמלי שיוצר תיל אינסופי מסביבו לפי משפט גאוס האינטגרלי. נבנה משטח גאוס בצורת גליל ברדיוס R וגובה H מסביב לתיל. מסימטריה $\vec{E}=E(r)\hat{r}$ ומקבלים לכן:

שטף רק דרך ספת הגליל: $2\pi R H E_r = 4\pi Q = 4\pi\lambda H$

$$\Downarrow$$

$$E_r = \frac{2\lambda}{R} = -\frac{\partial\phi}{\partial R}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2\lambda}{r}\hat{r} = -\vec{\nabla}\phi \Rightarrow \boxed{\phi(r,\varphi,z) = -2\lambda\ln(r) + const}$$

$\Leftarrow$ אם תיל ממוקם כך שקווו מקביל לציר $\hat{z}$, ובמישור XY וקטור המיקום שלו הינו $\vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y}$ ~~הינו~~, אז הפוטנציאל בנקודה $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$ (וקורדינטה z שרירותית) הוא:

$$\boxed{\phi(\vec{r}\to\infty)\neq 0} \quad \boxed{\phi(\vec{r}) = -2\lambda\ln\left(|\vec{r}-\vec{r}'|\right) + const}$$

אנו משתמשים בדרגת החופש של ה- const כדי לפתור את הבעיה

כדי למצוא את הפוטנציאל מחוץ לגליל $(r>a)$ נמקם תיל דמות בתוך הגליל, המקביל לתיל האינסופי והטעון בצפיפות מטען אורכית $-\lambda$, במיקום $\vec{r}''$ במישור XY, על הקו המחבר בין התיל למרכז הגליל.

נקבל:
$$\phi(\vec{r}) = -2\lambda\ln\left(|\vec{r}-\vec{r}'|\right) + 2\lambda\ln\left(|\vec{r}-\vec{r}''|\right) + const$$

נסמן: $const = 2\lambda\ln\left(\frac{q'}{q''}\right)$ כאשר q', q'' הם שני קבועים שנמצא לפי תנאי השפה.

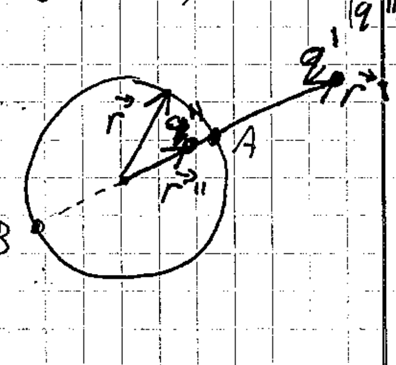
נדרוש שעל הגליל הפוטנציאל יתאפס: כאשר:
$$\boxed{\vec{r} = a\cos(\varphi)\hat{x} + a\sin(\varphi)\hat{y}}$$

$$\phi\left(a\cos(\varphi)\hat{x} + a\sin(\varphi)\hat{y}\right) = -2\lambda\ln\left(|\vec{r}-\vec{r}'|\right) + 2\lambda\ln\left(|\vec{r}-\vec{r}''|\right) + 2\lambda\ln\left(\frac{q'}{q''}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = \ln\left(\frac{q''}{|\vec{r}-\vec{r}''|}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{q''}{|\vec{r}-\vec{r}''|}}$$



קיבלנו משוואה ששקולה לבעיה תלת-מימדית של שני מטענים נקודתיים q', q'' הנמצאים מחוץ ובתוך קליפה כדורית (בהתאמה) כך שהפוטנציאל על הקליפה מתאפס. בפרט זה נכון לנקודות A ו B המסומנות (הנמצאות על הקו המחבר בין המטענים) נקבל 2 משוואות:

$$\left.\begin{aligned}\frac{q'}{r'-a} &= \frac{q''}{a-r''} \\ \frac{q'}{r'+a} &= \frac{q''}{a+r''}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{r'+a}{r'-a} = \frac{-r''+a}{r''-a} \Rightarrow (r'+a)(a-r'') = (r''+a)(r'-a)$$

$$\cancel{r'a} - r'r'' + a^2 - \cancel{ar''} = r'r'' - \cancel{ar''} + \cancel{ar'} - a^2$$

$$2r''r' = 2a^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{r}\,'' = \frac{a^2}{r'^2}\vec{r}\,'} \Leftarrow r'' = |\vec{r}\,''| = \frac{a^2}{r'}$$

$$\frac{q'}{r'+a} = \frac{q''}{a+r''} = \frac{q''}{a+\frac{a^2}{r'}} = \frac{r'q''}{ar'+a^2} \Longrightarrow \boxed{q''} = q'\cdot\frac{a(r'+a)}{r'(r'+a)} \boxed{= \frac{a}{r'}q'}$$

~~היות ו- q', q'' הן קבועים שרירותיים שבחרנו, והדבר היחיד~~
~~שחשוב~~

$$\boxed{\frac{q'}{q''} = \frac{r'}{a} = \frac{b}{a}} \Longleftarrow$$

$$\Longrightarrow \phi(\vec{r}) = -2\lambda\ln\left[|\vec{r}-\vec{r}\,'|\right] + 2\lambda\ln\left[|\vec{r}-\vec{r}\,''|\right] + 2\lambda\ln\frac{q'}{q''}$$

$$= -2\lambda\ln\left[|\vec{r}-\vec{r}\,'|\right] + 2\lambda\ln\left[\left|\vec{r}-\frac{a^2}{r'^2}\vec{r}\,'\right|\right] + 2\lambda\ln\left(\frac{r'}{a}\right)$$

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = 2\lambda\ln\left[\frac{b\left|\vec{r}-\frac{a^2}{b^2}\vec{r}\,'\right|}{a\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]}$$

זה הפוטנציאל עבור $a<r$.

כמובן שעבור $a>r$ מקבלים $\phi=0$, כי המשוואה

היא $\nabla^2\phi=-4\pi\rho=0$, $\phi\big|_{שפה}=0$ $\Leftarrow$ $\boxed{\phi(r<a,\varphi)=0}$

ג) למעשה קיבלנו את פונקציית גרין הדו-מימדית לבעיות עם גיאומטריית שפה זהה ועם תנאי שפה מסוג דיריכלה. כל שעלינו לעשות הוא להחליף $|\vec{r}\,'|\to b$, $2\lambda\to 1$

שימו לב שהפקטור 2 נעלם בגלל משפט גאוס הדו-מימדי!

השטף הוא כבר לא דרך קליפות כדוריות עם שטח $4\pi r^2$
אלא סביב מעגלים עם "שטח" חד-מימדי (היקף) $2\pi r$.

$$\oint_{\partial V} \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = 4\pi\iiint_V \rho(\vec{r})\,d^3\vec{r} \longmapsto \oint_{\partial S}\vec{E}\cdot\hat{n}\,dl = 2\pi\iint_S \rho(\vec{r})\,d^2\vec{r} \Longleftarrow$$

כך נקבל:

$$\underbrace{G(\vec{r},\vec{r}')}_{\text{פוטנציאל הנובע מתיל}} = \ln\left[\frac{\left|\vec{r}-\frac{a^2}{|\vec{r}'|^2}\vec{r}'\right|}{\frac{a}{|\vec{r}'|}\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\right]$$

יחידה $(q=1)$ בנק' $\vec{r}'$.

בקרדינטות פולאריות (r,φ):

$$\boxed{G(\vec{r},\vec{r}') = \ln\left[\frac{\sqrt{r^2+\frac{a^4}{r'^4}r'^2-2r\frac{a^2}{r'^2}r'\cos(\varphi-\varphi')}}{\sqrt{\left(\frac{a}{r'}\right)^2\cdot\left(r^2+r'^2-2rr'\cos(\varphi-\varphi')\right)}}\right] = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{r^2r'^2+a^4-2rr'a^2\cos(\varphi-\varphi')}{a^2\left(r^2+r'^2-2rr'\cos(\varphi-\varphi')\right)}\right]}$$

וזה הפוטנציאל <u>הדו-מימדי</u> המתאים לגיאומטריה הנ"ל:

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \iint_S \rho(\vec{r}')\,G(\vec{r},\vec{r}')\,d^2r' - \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial S}\phi(\vec{r}')\frac{\partial G}{\partial n'}\,dl'}$$

תשתמשו בזה בתרגיל בית.