קוסמולוגיה - תרגול 10

Migration in discs due to dynamical Friction (I)

בתרגול הקודם פיתחנו את נוסחאות צ'נדרסקאר עבור חיכוך דינאמי בתווך אינסופי, הומוגני ועם התפלגות מהירויות איזוטרופית

$$\vec{F}_{D.F.} = M\frac{d\vec{v}}{dt} = -4\pi G^2 M^2 \rho \left(\frac{\vec{V}}{V^3}\right) \ln(\Lambda) \int_0^V dV_b\, 4\pi V_b^2 f(V_b)$$

$\Lambda = \frac{b_{max}}{b_{min}} \rightarrow$ Coulomb Logarithm

כאשר M זה המסה של הגוף החיצוני, ρ זו צפיפות המסה של החלקיקים בתווך, V זו המהירות של M יחסית למרכז המסה של התווך, $f(V_b)$ זו התפלגות המהירויות של התווך, שעל פי ההנחה היא איזוטרופית כלומר $f(\vec{V}_b) = f(V_b)$ ומנורמלת ליחידה

$$\int d^3V_b\, f(\vec{V}_b) = \int_0^\infty 4\pi V_b^2 f(V_b)\, dV_b = 1$$

כעת אנו מעוניינים לדון בבעיה קשורה, של מסה M הנמצא בתוך דיסקה של גז/כוכבים אשר מסתובבת. זה ברור שבעיה זו היא לא איזוטרופית או הומוגנית כי כל הדיסק מוגבל למישור והמהירות הכוללת היא בכיוון $\hat{\varphi}$.

אז איך ניתן להשתמש בנוסחאות צ'נדרסקאר?
יש לנו מספר בעיות עם זה:

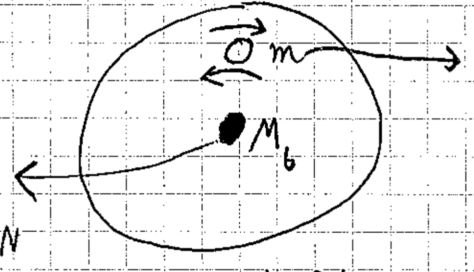
- בשביל חיכוך דינאמי, היינו צריכים מהירות יחסית בין הגוף לרקע, אבל כאן, בסדר אפס, המסה M

מסתובבת יחד עם הדיסקה ולכן לצבירה אין מהירות יחסית

- מהו $\Lambda = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$?
- האם הגלו אפקט יהיה פנימה/החוצה? האם יהיה אפקט?

$\Leftarrow$ באופן כללי, בגלל שפרופיל המהירות הזוויתית ופרופיל המסה בדיסק הם לא אחידים, כלומר $\Omega=\Omega(r)$, $\Sigma=\Sigma(r)$, נקבל שכן יש אפקט.

ניתן להבין זאת אם נסתכל על דיסקה שבה $\Sigma=const$ (אבל Ω קטן כלפי חוץ (למשל, פרופיל קפלרי $\Omega(r) \propto r^{-3/2}$).



השכבה שקרובה פנימית לm מסתובבת מהר יותר (עם Ω גדול יותר) ולכן, כמו בחיכוך קינמטי, היא שואפת להקטין את המהירות היחסית בינה לבין m, כלומר להגביר את המהירות של m, וכך לגרום לm לעשות מיגרציה החוצה

~~[illegible]~~ מטעמי שימור תנע זוויתי ואנרגיה (הגברתי מהירות, אז אני מסתובב מהר מדי לרדיוס סיבוב קטן ואז צריך לעבור לרדיוס גדול יותר, כמו בקפלר).

מצד שני, השכבה שחיצונית לm מסתובבת לאט יותר ממנה, ולכן תשאף להקטין את המהירות של m וכך לגרום לה ליפול פנימה.

אם גם $\Omega(r)=const$, אז לא יהיה אפקט כזה
ולכאורה לא נקבל מיגרציה (בהנחה שגם $\Sigma(r)=const$)
זה לא בדיוק נכון, ולמעשה טיפול מלא בבעיה
דורש חישובים של גלי צפיפות שמתעוררים בדיסק בעקבות
ההפרעה (המסה m). גלים אלה, ובמיוחד רזוננסים
שלהם, הם אלה שסוחבים את האנרגיה והת"ז
פנימה או החוצה, וזה הרבה יותר מורכב מהתמונה
הפשוטה שתיארנו מעלה.
למרות זאת, בדיסק יש פרופילים מסויימים שעבורם
לא תהיה מיגרציה, וכאלה שעבורם המיגרציה תהיה
החוצה, ועכשיו הבנו בכלליות איך זה קורה
(למשל, בתמונה הפשוטה שלנו, אם $\Omega(r)$ גדל החוצה
אז תהיה מיגרציה החוצה)

הבנו שזה המהירות היחסית שנובעת מפרופיל Ω לא
טריוויאלי שגורמת למיגרציה.
באיזה מרחק רדיאלי מהגוף m האפקט דומיננטי?
מאוד רחוק מהמסה, יש הרבה יותר חומר בדיסק (שטח
הולך כמו $2\pi R dR$) אבל גם המהירות היחסית
מאוד גבוהות $\Omega' \cdot R \sim V_{rel}$, ולכן האפקט יהיה
קטן, שכן בחיכוך דינאמי $\dot{v} \propto \frac{1}{v^2}$
קרוב מאוד ל-m V_{rel} קטן, אבל יש מעט מאוד
חומר.
האפקט המקסימלי יקרה כאשר $h \sim R$ כאשר h
הינו עובי הדיסקה. הסיבה לכך היא שכל עוד $h<R$
המסה m רואה התפלגות מסה תלת-מימדית ולכן $M_{disc} \propto R^3$

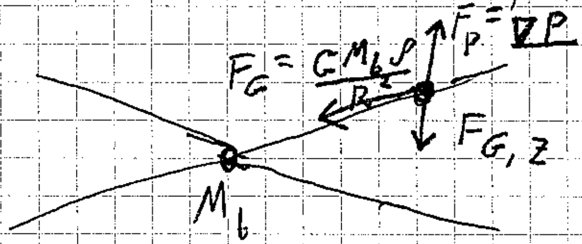
אבל עבור $h<\delta R$ המסה מרגישה התפלגות מסה קו-מימדית $M_{disc}\propto \delta R\, R^2$ וסופרת כמות מסה ככל שמגדילים את δR.

במרחק הזה, המהירות היחסית:

$$\boxed{V_{rel}}\sim \Omega\,\delta R\sim\Omega h\sim\boxed{\frac{V_{(R)}}{R}\cdot h}\sim\boxed{\sigma}$$

כאשר σ היא מהירות הדיספרסיה של הדיסקה והמעבר האחרון נובע משיווי משקל הידרוסטטי:

אם נניח דיסק שמסתובב סביב מסה מרכזית M_b ונשאל מהם הכוחות שמרגישים אלמנט מסה dm על שפת הדיסק במרחק R מהמרכז:



$$\underbrace{\frac{GM_b}{R^2}}_{\text{גרביטציה}}\cdot\underbrace{\frac{h}{R}}_{\text{רכיב } \hat{z}}=\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}}_{\text{כמות לחץ}}$$

נקבל:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}\sim\frac{1}{\rho}\frac{P}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{P}{\rho}\right)\sim\frac{\sigma^2}{h}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{GM_b}{R}\cdot\frac{h}{R^2}\sim\frac{\sigma^2}{h}\Rightarrow\sigma^2\sim\frac{GM_b}{R}\cdot\left(\frac{h}{R}\right)^2=V_{(R)}^2\left(\frac{h}{R}\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\sigma}{V}\sim\frac{h}{R}}\Longleftarrow\sigma\sim V_{(R)}\cdot\frac{h(R)}{R}$$

עם התוצאות הנ"ל, נשתמש בנוסחאות צ'נדרסקאר כדי להעריך את האפקט ע"י חישוב מומנט הכוח על המסה m. בגלל שגם ככה החשבון מקורב

נתעלם מפקטורים חסרי יחידות:

מומנט הכוח רק מצד אחד (למשל החיצוניים) על m:

$$\tau_{one\text{-}sided} = m r \frac{dv}{dt} \sim m r \cdot \frac{G^2 m \rho}{v_{rel}^2} \sim \frac{G^2 m^2 r \cdot \Sigma/h}{(\Omega h)^2}$$

$$\sim \frac{G^2 m^2 r \Sigma}{(G \underbrace{M_{tot}}/r^3)\, h^3} = (\Sigma r^2) \cdot \frac{G m^2 r^2}{M_{tot} h^3} = \cancel{\ldots}$$

total mass interior to r (spherical)

$$\boxed{= (\Sigma r^2) \underbrace{\frac{G M_{tot}}{r}}_{(\Omega r)^2} \cdot \left(\frac{m}{M_{tot}}\right)^2 \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^3}$$

בסדר גודל אפס, הצד הפנימי והצד החיצוני יפעילו מומנט כזה בכיוונים הפוכים ולכן לא יהיה אפקט. אבל, בגלל שהדיסק לא אחיד:

$$\Omega(r \pm h) \sim \Omega(r)\left(1 \pm \frac{h}{r}\right)$$

$$\Sigma(r \pm h) \sim \Sigma(r)\left(1 \pm \frac{h}{r}\right)$$

וכאשר נחשב את ההפרש, נקבל פקטור של $\sim \frac{h}{r}$ כפול הביטוי למעלה:

$$\boxed{\tau_{net} \sim \Sigma r^2 \cdot (\Omega r)^2 \cdot \left(\frac{m}{M_{tot}}\right)^2 \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2}$$

נניח כי הפרופיל הוא כזה שהמסה תיפול פנימה. מהו הזמן האופייני שייקח למסה להגיע למרכז הדיסקה? ~~[illegible]~~ זהו

<u>The Migration Time</u>

$$t_{mig} \sim \frac{L}{\dot{L}} \sim \frac{L}{\tau_{net}} \sim \frac{\cancel{m} \cdot \cancel{r} \cdot \cancel{v} \quad M_{tot}^2 \cdot h^2}{\Sigma r^{\cancel{2}} \cdot v^{\cancel{2}} \cdot m^2 \cdot r^2}$$

$$t_{mig} \sim \frac{M_{tot}^2 h^2}{m\Sigma r^2 \cdot V r} \sim \frac{1}{\Omega}\cdot\frac{M_{tot}^2}{m\Sigma r^2}\cdot\left(\frac{h}{r}\right)^2$$

$$\boxed{t_{mig} \sim \underbrace{t_{dyn}}\cdot\left(\frac{M_{tot}}{\underbrace{M_{disc}}}\right)\cdot\left(\frac{M_{tot}}{m}\right)\cdot\left(\frac{h}{r}\right)^2}$$

$\longrightarrow M_{disc} \sim \Sigma r^2$

זמן דינאמי $t_{dyn} \sim \frac{R}{V} \sim \frac{1}{\Omega}$

dynamical time
(crossing time)

- ככל שהמסה m גדולה יותר היא תיפול פנימה מהר יותר $\Leftarrow$ t_{mig} קטן יותר
- ככל שהדיסקה עצמה M_{disc}, מאסיבית יותר, יש יותר חומר שעושה את אפקט החיכוך הדינאמי ולכן זמן המיגרציה קטן.
- ככל שהמסה הכוללת $M_{tot} = M_{disc} + M_{bulge} + M_{dark\ matter}$ גדולה יותר, מהירות הסיבוב גבוהות יותר ולכן גם המהירויות היחסיות גבוהות יותר ולכן החיכוך קטן יותר ו- t_{mig} ארוך יותר

(הנחנו שהחיכוך עצמו נובע רק מהדיסקה, אבל שכל הרכיבים משפיעים גרביטציונית בסדר אפס).

- ככל ש $\frac{\sigma}{V} \sim \left(\frac{h}{r}\right)$ קטן יותר, זה אומר דיסקה שטוחה יותר $\Leftarrow$ פחות מהירויות רנדומליות/לחץ $\Leftarrow$ מהירות יחסית קטנה יותר $\Leftarrow$ חיכוך דינאמי חזק יותר $\Leftarrow$ t_{mig} קצר יותר.

II Linear Stability of thin, self-gravitating, rotating discs → Toomre Stability

נניח דיסקה דקה (דו-ממדית לחלוטין לצורך העניין)
אשר מושפעת רק מהגרביטציה העצמית שלה ומסתובבת
סביב צירה. נניח שהדיסקה עשויה רק מגז
שעונה למשוואות ההידרודינאמיקה הקלאסית.

מהו התנאי שבו הפרעות אקסי-סימטריות (רדיאליות)
תהיינה יציבות, או שמא יגרמו לקריסה גרביטציונית
(כלומר קריסה של הדיסק המגז לטבעות דקות)?

יש 3 אפקטים פיזיקליים רלוונטיים כאן:

1. גרביטציה עצמית (משוואת פואסון)
2. לחץ/מהירות דיספרסיה
3. רוטציה ומהירות יחסית (shear) בגלל הפרופיל.

* מצד אחד, אנחנו יודעים מאנלוגית ג'ינס (שראינו בעבר עבור מערכות ספריות), שהלחץ מייצב עבור סקלות קטנות ומונע מהן לקרוס.

נדמיין דיסקה בגודל r ומסה $M=\pi\Sigma r^2$

התנאי ליציבות להפרעות: $\underbrace{\frac{GM}{r}}_{\text{אנרגיה פוט'}} < \underbrace{\sigma^2}_{\text{אנרגיה קינטית}}$ ↔ נובע מלחץ

כלומר: $\pi G\Sigma r < \sigma^2$

$$\boxed{r < \frac{\sigma^2}{\pi G\Sigma}}$$ ← סקלות יציבות!

* מצב שני, הרוטציה יוצרת כוחות צנטריפוגליים שמונעים מסקלות ארוכות לקרוס:

<u>תנאי ליציבות:</u>

$$\underbrace{\frac{GM}{r}}_{E_p} < \underbrace{(\Omega r)^2}_{E_k \text{ של סיבוב}}$$

$$\Downarrow$$

$$\Pi G \Sigma r < \Omega^2 r^2 \Longrightarrow \text{סקלות יציבות} \quad \boxed{r > \frac{\Pi G \Sigma}{\Omega^2}}$$

אנו רואים שבאופן כללי, לחץ מייצב סקלות קצרות וסיבוב מייצב סקלות גדולות.

כדי שאי-יציבות תתאפשר בכלל, אנו צריכים לקיומה של סקלה שהיא גדולה מדי כדי שלחץ ייצב אותה אבל קטנה מדי כדי שסיבוב ייצב אותה. כלומר, סקלה r כך שמתקיים

$$\frac{\sigma^2}{\Pi G \Sigma} < r < \frac{\Pi G \Sigma}{\Omega^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sigma^2 \Omega^2}{(\Pi G \Sigma)^2} < 1$$

נראה כי זה קרוב <u>מאוד</u> לתנאי האמיתי

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\sigma \Omega}{\Pi G \Sigma} < 1 \qquad \text{תנאי } \underline{\underline{\text{לאי-יציבות}}}}$$

כדי לפתור את הבעיה הזו במדויק, עלינו לקחת
את 3 המשוואות

(1) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\rho \cdot \vec{v}\right) = 0$$

(2) $$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P - \vec{\nabla}\Phi$$

(3) $$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

להציב "מצב יציב"

$$\rho_0 = \Sigma_0(r)\,\overbrace{\delta(z)}^{\text{Dirac}}$$

$$\vec{V}_0 = \Omega(r)\cdot r\cdot\hat{\varphi}$$

(משוואת מצב) $P \propto \rho^{\gamma} \longrightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial \rho} = \gamma\frac{P}{\rho} = C_s^2}$

מהירות הקול בריבוע.

בקרונית, אם יש מהירויות רנדומליות סופרסוניות
עם מהירות אופיינית $\sigma > C_s$, אז הם יתרמו גם
ללחץ שאינו תרמי (non-thermal pressure), שיגבר
על הלחץ התרמי, ובסופו של דבר נרשום $\boxed{\frac{\partial P}{\partial \rho} = \sigma^2}$

ואז להציב הפרעה אקסי-סימטרית:

$$\begin{Bmatrix} \Sigma_1(r) \\ V_1(r)\,\hat{r} \\ P_1(r) \end{Bmatrix}$$

לבצע לינאריזציה, להציב $\begin{pmatrix}\Sigma_1\\ V_1\\ P_1\end{pmatrix} \propto e^{i(kr-\omega t)}$

ולחשב את משוואות הנפיצה.

$\boxed{\text{תעשו את כל זה בבית}}$

כאן, נעשה טיפול מעט פשטני שמסתבר שעובד

נתייחס בנפרד ללחץ, לגרביטציה ולסיבוב.
נקבל עבור כל אחד בנפרד את $\omega^2(k)$ הלינארי
(בתורת ההפרעות) ואז נאמר

$$\boxed{\omega_{tot}^2(k) = \omega_{grav}^2(k) + \omega_{pres}^2(k) + \omega_{rot}^2(k)}$$

זה עובד כי ממילא אנחנו מבצעים תורת הפרעות לינארית ובתנאים אלה ω^2 נסכם בצורה פשוטה, מכיוון שבאיזשהו מקום ששלושת האפקטים בלתי תלויים זה בזה (אין איברים מעורבים).

בכל מקרה, בבית תראו שמקבלים את אותה התוצאה.

(1) **לחץ**: נעשה אנליזה חד-מימדית:

$$\text{(1)}\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}$$

$$\text{(2)}\quad \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{C_s^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right] = -C_s^2\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

כעת נציב:

$$\rho = (\Sigma_0 + \Sigma_1)\delta(z)$$

$$V = 0 + V_1$$

אנליזה בלי סיבוב, רק עם לחץ

$$\Rightarrow \text{(1)}\quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} = -\Sigma_0\frac{\partial V_1}{\partial x}$$

$$\text{(2)}\quad \Sigma_0\frac{\partial V_1}{\partial t} = -C_s^2\frac{\partial \Sigma_1}{\partial x}$$

$$\Sigma_1 = \tilde{\Sigma}_1 e^{i(kx-\omega t)} \qquad V_1 = \tilde{V}_1 e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\Rightarrow -i\omega\tilde{\Sigma}_1 = -ik\Sigma_0\tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}_1 = \frac{\omega}{k}\frac{\tilde{\Sigma}_1}{\Sigma_0}$$

$$-i\omega\Sigma_0\tilde{V}_1 = -ikC_s^2\tilde{\Sigma}_1 \rightarrow \tilde{V}_1 = \frac{k}{\omega}C_s^2\frac{\tilde{\Sigma}_1}{\Sigma_0}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\omega}{k} = \frac{kC_s^2}{\omega}}$$

$\boxed{\omega = C_s k}$

בסה"כ קיבלנו:

משוואות הנפיצה של גלי לחץ
שהם בעצם גלי קול. הגל מתקדם במהירות הקול
ולכן הזמן האופייני כדי להתקדם אורך גל λ הוא

$$\frac{2\pi}{\omega} = T = \frac{\lambda}{C_s} = \frac{2\pi}{C_s k} \longrightarrow \boxed{\omega = C_s k}$$

(2) גרביטציה

ניחוש: המהירות האופיינית של הפרעות היא לאחר זמן t

$$V \sim \frac{GM}{\lambda^2}\cdot t \sim \frac{G\Sigma\lambda^2}{\lambda^2} t \sim G\Sigma t$$

ולכן כדי להתקדם את אורך הגל λ נקח זמן אופייני

$$\lambda \sim V\cdot t \sim G\Sigma t^2 \Longrightarrow t \sim \sqrt{\frac{\lambda}{G\Sigma}} \sim \sqrt{\frac{1}{G\Sigma k}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega \sim \sqrt{G\Sigma k}}$$

ננסה להשיג את המצב!

(1) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = 0$

(2) $\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\rho$

אין לחץ. רק גרביטציה.

(3) $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$

$\rho = (\Sigma_0 + \Sigma_1)\delta(z)$

$V = 0 + V_1$

$\phi = \phi_0 + \phi_1$

$$\Downarrow$$

(1) $\frac{\partial\Sigma_1}{\partial t} + \Sigma_0\frac{\partial V_1}{\partial x} = 0$

(2) $\Sigma_0\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right) = 0$

(3) $\nabla^2\phi_1 = 4\pi G\underbrace{\Sigma_{(x)}}_{\text{(תלוי רק ב-}x\text{)}}\underbrace{\delta(z)}_{\text{(תקוע ב-}\hat{z}\text{)}}$

כדי לפתור את משוואת פואסון, ננסה פתרון בהפרדת משתנים

$$\phi_1 = X(x) \cdot Z_1(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Z''}{Z} = 0$$ <u>עבור $z \neq 0$ נקבל:</u>

$$\Downarrow$$

$$\frac{X''}{X} = -k^2 = -\frac{Z''}{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$X(x) = \underbrace{\tilde{A} e^{ikx}}_{\text{גל נע ימינה}} + \underbrace{\tilde{B} e^{-ikx}}_{\text{גל נע שמאלה}} = \underbrace{\tilde{A} e^{ikx}}_{\text{תנאי שפה}}$$

(למה להקשות?)

$$Z(z) = \tilde{C} e^{kz} + \tilde{D} e^{-kz}$$

כמובן שמתקיים $\phi_1(z \to \infty) = 0$ ולכן נקבל:

$$\phi_1(x,z) = \begin{cases} A e^{ikx - kz} & z > 0 \\ B e^{ikx + kz} & z < 0 \end{cases}$$

ב $z=0$, יש צפיפות מסה משטחית. תנאי השפה הם:

(א) $\phi(x, z \to 0^+) = \phi(x, z \to 0^-)$

$$\Rightarrow \boxed{A = B}$$

(ב) $\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z \to 0^+} - \left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z \to 0^-} = 4\pi G \Sigma_1 \longrightarrow$ חוק גאוס (כמו בחשמל עם מישור אינסופי טעון)

$$(-kA - kB) e^{ikx} = 4\pi G \Sigma_1$$

$$A = -\frac{2\pi G \Sigma_1(x) e^{-ikx}}{k}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\phi_1(x,z) =} \; A e^{ikx - k|z|} = \boxed{-\frac{2\pi G \Sigma_1(x)}{k} e^{-k|z|}}$$

במישור הדיסקה, $Z=0$, אחרי שנוסיף גם תלות
זמנית של ההפרעות:

$$③ \quad \boxed{\phi_1(x,t) = -\frac{2\pi G}{k}\Sigma_1(x,t)}$$

$$① \quad \boxed{\frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} + \Sigma_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0}$$

$$② \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \boxed{\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{2\pi G}{k}\frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} = 0}$$

$$\begin{cases} \Sigma_1(x,t) = \tilde{\Sigma}_1 e^{i(kx-\omega t)} \\ V_1(x,t) = \tilde{V}_1 e^{i(kx-\omega t)} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$-i\omega \tilde{\Sigma}_1 + ik\Sigma_0 \tilde{V}_1 = 0 \longrightarrow \boxed{\tilde{V}_1 = \frac{\omega}{k}\cdot\frac{\tilde{\Sigma}_1}{\Sigma_0}}$$

$$-i\omega \tilde{V}_1 - \frac{2\pi G}{\cancel{k}} i\cancel{k}\tilde{\Sigma}_1 \rightarrow \boxed{\tilde{V}_1 = -\frac{2\pi G}{\omega}\tilde{\Sigma}_1}$$

$$\Longrightarrow \frac{\omega}{\Sigma_0 k} = -\frac{2\pi G}{\omega} \Longrightarrow \boxed{\omega^2 = -2\pi G k \Sigma_0}$$

⊛ $\omega^2 \propto G\Sigma_0 k$ כמו שהערכנו בהתחלה

⊛ ω^2 תלוי בצפיפות הלא מופרעת של הדיסק Σ_0

⊛ $\omega^2 < 0$ תמיד $\Longleftarrow$ ω מדומה תמיד!

ולכן $e^{-i\omega t}\propto e^{|\omega| t}$ מתבדר!

כלומר ההפרעה תמיד גדלה ואף פעם לא יציבה!

אבל זה הגיוני גרביטציה מעודדת קריסה, ולכן הכנסנו למשוואות אלו אף גורם מייצב כגון לחץ או סיבוב.

(3) סיבוב נניח רק סיבוב בפוטנציאל נתון, ללא לחץ וכוחות הידרודינמיים וללא גרביטציה עצמית.

משוואות התנועה: לגרנז'יאן: $\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2)-\phi_{(r)}$

$$\Downarrow$$

$$(1)\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot\varphi}=r^2\dot\varphi=const\equiv \underbrace{L}_{\text{תנ"ז ליחידת מסה}} \Longrightarrow \boxed{\dot\varphi=\frac{L}{r^2}}$$

$$(2)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot r}=\frac{d}{dt}\dot r=\ddot r=+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r}=r\dot\varphi^2-\frac{\partial\phi}{\partial r}=F_{(r)}+r\dot\varphi^2$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot r=F_{(r)}+r\dot\varphi^2=F_{(r)}+\frac{L^2}{r^3}$$

כח ליחידת מסה שנובע מהפוטנציאל $F_{(r)}=-\frac{\partial\phi}{\partial r}$

נניח מסלול "כמעט מעגלי" סביב $r=R$. כלומר:

$$\boxed{F_{(R)}+\frac{L^2}{R^3}=0}$$

עבור $r=R+\delta r$ $\Longleftarrow$ $\delta\ddot r\simeq F_{(R)}+F'_{(r)}\Big|_{r=R}\cdot\delta R+\frac{L^2}{R^3}-\frac{3L^2}{R^4}(\delta R)$

$$\delta\ddot{r} \simeq -\left[\frac{3L^2}{R^4} - F'(r)\Big|_{r=R}\right]\delta r \equiv -\kappa^2 \delta r$$

כאשר הגדרנו את התדירות האפיציקלית κ
(the epicyclic Frequency)

זוהי התדירות הטבעית שבה אלמנטי מסה נעים
בשמה והוצגה סביב מסלולים מעגליים יציבים
(בפועל, זה מתורגם לתנועה אליפטית, או תנועה
מורכבת שאינה נסגרת על עצמה)

מה הקשר בין κ לבין $\Omega=\dot{\varphi}$ (התדירות סיבוב)

עבור $r=R$, F מאזן את הכוח הצנטריפוגלי
בגלל ש $F'(R)$ שמופיעה כבר מכפיל (δr), אנו
מעוניינים רק בסדר האפס שלו!

$$F(r) = -\frac{L^2}{r^3} \longrightarrow F'(r) = -\frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{r^3}\right) = -\frac{d}{dr}(\Omega^2 \cdot r) =$$

$$\boxed{F'(r) = -\Omega^2(r) - r\frac{d(\Omega^2)}{dr}}$$

$$\kappa^2 = \frac{3L^2}{R^4} - F'(R) = 3\Omega^2 + \Omega^2 + r\frac{d\Omega^2}{dr}$$

$$\boxed{\kappa^2_{(r)} = 4\Omega^2(r) + r\frac{d}{dr}\Omega^2}$$

I) עבור פרופיל קפלרי: $\Omega \propto r^{-3/2} \Longleftarrow \kappa^2(r) = \Omega^2(4-3) = \Omega^2$

$\boxed{\kappa = \Omega} \longrightarrow$ מסלולים סגורים (אליפסות)

כי זמני המחזור של r ושל φ שווים!

(II) גוף קשיח: $\Omega = const \Leftarrow \kappa^2 = 4\Omega^2$

$$\boxed{\kappa = 2\Omega} \longrightarrow$$ גם "יתן מסלול שייסגר על עצמו כי היחס בין κ לבין Ω הוא מספר רציונלי!

(III) מהירות סיבוב קבועה (כמו בגלקסיות): $V = const$

$$\Downarrow$$

$$\Omega \propto r^{-1} \Rightarrow \kappa^2 = 4\Omega^2 - 2\Omega^2 = 2\Omega^2$$

$$\boxed{\kappa = \sqrt{2}\,\Omega} \longrightarrow$$ המסלול לא "ייסגר" לעולם!

(IV) תנע זוויתי קבוע: $L = V \cdot r = \Omega r^2 = C$

$$\Omega \propto r^{-2} \Rightarrow \boxed{\kappa^2 = 0}$$

ואם התנע הזוויתי היה קטן כלפי חוץ, היינו מקבלים $\kappa^2 < 0$ כלומר אי-יציבות להפרעות רדיאליות הנקראות "אי-יציבות ריילי"

לסיכומו של דבר, עבור הבעיה המקורית שלנו:

$$\omega_{tot}^2 = \omega_{press}^2 + \omega_{grav}^2 + \omega_{rot}^2$$

$$\boxed{\omega^2 = c^2 k^2 - 2\pi G \Sigma_0 k + \kappa^2}$$

משוואת הנפיצה הכללית