חשמל ומגנטיות - תרגול 3

1 חוק גאוס הדיפרנציאלי

נזכיר את חוק גאוס האינטגרלי:

$$\oiint \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

משפט הדיברגנס מאפשר מעבר מאינטגרציה משטחית של שדה וקטורי לאינטגרציה נפחית על הנפח המוכל במשטח על הדיברגנס של אותו שדה:

$$\oiint \bar{E}\cdot d\bar{s} = \iiint \bar{\nabla}\cdot\bar{E}dV$$

חוק גאוס הדיפרנציאלי אומר ש-

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

כאשר ρ הינה צפיפות המטען הנפחית.
נזכיר מהו הדיברגנס בקואורדינטות קרטזיות, גליליות וכדוריות:

$$div\bar{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$
$$div\bar{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta) + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$
$$div\bar{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r) + \frac{1}{rsin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}(sin(\theta)F_\theta) + \frac{1}{rsin(\theta)}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

הערה על רציפות השדה החשמלי:

את השדה החשמלי של התפלגות מטען כלשהי ניתן לכתוב כך:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \iiint dV\frac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}(\bar{r}-\bar{r}')$$

כל עוד צפיפות המטען סופית בכל מקום, גם השדה יהיה סופי בכל מקום (קרוב ל - $\bar{r}$, אלמנט השטח הולך ל-0 כמו $|\bar{r}-\bar{r}'|^2$). מעבר לכך, כל עוד אין נקודות בהן ρ הולך לאינסוף (מטען סופי בנפח אפסי) השדה החשמלי יהיה רציף. קפיצות בשדה מתקבלות במעבר דרך משטח טעון, למשל, כי שם הצפיפות הנפחית היא אינסופית. הקפיצה בשדה פרופורציונלית לצפיפות המטען המשטחית אותה חוצים:

$$\Delta E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

דוגמא:

בקליפה כדורית בעלת רדיוס R טעונה בצפיפות משטחית σ, השדה בפנים הוא אפס לפי חוק גאוס, ובחוץ $\bar{E}=\frac{KQ}{r^2}\hat{r}$ כאשר Qהוא המטען הכולל: $Q=4\pi R^2\sigma$. הקפיצה בשדה:

$$E(R_+)-E(R_-)=\frac{KQ}{R^2}-0=\frac{K4\pi R^2\sigma}{R^2}=\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

1.1 דוגמא:

מהי צפיפות המטען שיוצרת את השדה הבא:

$$\bar{E}=\begin{cases} 0 & x^2+y^2+z^2<a \\ A(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}) & a<x^2+y^2+z^2<b \\ \frac{Ab^{3/2}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}) & b<x^2+y^2+z^2 \end{cases}$$

פתרון:

נחשב את הדיברגנס של השדה הזה:

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E}=\begin{cases} 0 & x^2+y^2+z^2<a \\ 3A & a<x^2+y^2+z^2<b \\ 0 & b<x^2+y^2+z^2 \end{cases}$$

את החישוב אפשר לעשות בקואור. קרטזיות:

$$div(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})=3$$
$$div(\frac{x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}})=\frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}=0$$

וקל יותר לבצע בקואור. כדוריות:

$$\bar{E}=\begin{cases} 0 & r<\sqrt{a} \\ Ar\hat{r} & \sqrt{a}<r<\sqrt{b} \\ \frac{Ab^{3/2}}{r^2}\hat{r} & \sqrt{b}<r \end{cases}$$

שימוש בנוסחא לדיברגנס בקואור. כדוריות נותן את אותה תוצאה.

כעת, שימו לב כי השדה הזה לא רציף - ב - $r=\sqrt{b}$ הוא עובר חלק, אולם ב-$r=\sqrt{a}$ ישנה קפיצה. קפיצה זו מעידה של קיום צפיפות מטען משטחית על הספרה בעלת הרדיוס $r=\sqrt{a}$. צפיפות המטען המשטחית:

$$E(\sqrt{a}_+)-E(\sqrt{a}_-)=A\sqrt{a}-0=\frac{\sigma}{\epsilon_0}\Rightarrow\sigma=\epsilon_0A\sqrt{a}$$

לסיכום: התפלגות המטען שקיבלנו הינה ההתפלגות של קליפה כדורית טעונה בצפיפות מטען אחידה $\rho=3A\epsilon_0$ בעובי $\sqrt{b}-\sqrt{a}$, וכן התפלגות משטחית $\sigma=\epsilon_0A\sqrt{a}$ על ספרה ברדיוס $r=\sqrt{a}$.

2 אנרגיה פוטנציאלית של מערכת מטענים

האנרגיה הפוטנציאלית החשמלית של מערכת מטענים $q_1, ..., q_N$ במיקומים $\bar{r}_1, ..., \bar{r}_N$ נתונה ע"י הביטוי:

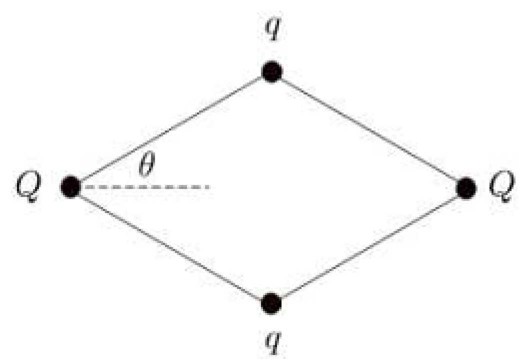
$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

כאשר $r_{ij} = |\bar{r}_i - \bar{r}_j|$. אנו למעשה סוכמים את האנרגיה הנובעת מהאינטראקציה בין כל זוגות המטענים. החלוקה ב־2 היא עקב ספירה כפולה של כל הזוגות.

האנרגיה הפוטנציאלית החשמלית שווה לסה"כ העבודה שיש לבצע על מנת ליצור את מערכת המטענים המדוברת, או למינוס העבודה הכוללת שמבצע הכח החשמלי בעת הרכבת המערכת. היא תהיה חיובית אם הכח החשמלי התנגד ליצירת המערכת, ושלילית אם הוא תמך בה.

2.1 דוגמא:

מתוארת מערכת של ארבעה מטענים שווי סימן: שניים שווים ל־Q ושניים שווים ל־q. המטענים מחוברים ביניהם ע"י חוטים בעלי אורך זהה l, כפי שניתן לראות בציור.



חשב את הזווית θ בשיווי משקל.

פתרון:

ניתן לפתור את השאלה ע"י חישוב וקטור הכח הפועל על כל מטען ולדרוש את התאפסותו, או לחילופין לדרוש שהאנרגיה הפוטנציאלית תהיה מינימלית (לא מקסימלית ־ המקסימום מתקבל כשהמטענים צמודים, וברור שזה לא מצב שיווי משקל). נציין ששתי הדרכים שקולות, מכיוון שהכח על כל מטען מתקבל כגראדיינט של האנרגיה הפוטנציאלית, ואם היא מינימלית ־ הגראדיינט הזה יתאפס.

נחשב את האנרגיה הפוטנציאלית:

$$U = \frac{Kq^2}{2lsin(\theta)} + \frac{KQ^2}{2lcos(\theta)} + 4\frac{KQq}{l}$$

נמצא את המינימום:

$$\frac{dU}{d\theta} = -\frac{Kq^2cos(\theta)}{2lsin^2(\theta)} + \frac{KQ^2sin(\theta)}{2lcos^2(\theta)}$$

השוואת הביטוי ל־ 0 תיתן לנו:

$$tg^3(\theta) = \left(\frac{q}{Q}\right)^2$$

נבדוק שהגיוני: אם $q \ll Q$ נצפה שהזווית תלך ל־0, וזה אכן מה שקורה בביטוי שקיבלנו.

2.2 דוגמא:

גביש חד מימדי אינסופי בנוי ממטענים נקודתיים המסודרים לאורך קו ישר במרווחים קבועים a. גודל המטען זהה q וסימן המטען מתחלף ממטען לשכנו. מהי האנרגיה הפוטנציאלית של מטען בודד בשרשרת?

פתרון:

התרומה משני השכנים הקרובים למטען: $u_1 = -2\frac{Kq^2}{a}$. התרומה של השכנים הבאים: $u_2 = 2\frac{Kq^2}{2a}$ וכן הלאה:

$$u = -2\frac{Kq^2}{a}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...\right)$$

כדי לחשב את סכום הטור נזכיר ש־ $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...$, טור זה מתכנס ב־ $-1 < x \leq 1$. המקרה שלנו מתאים ל־$x = 1$. מכאן ש־ $u = -2\frac{Kq^2}{a}ln(2)$. אם היינו לוקחים רק את שני השכנים הקרובים היה חסר לנו רק פקטור של $ln(2) \approx 0.7$.

2.3 דוגמא:

נתון גליל ארוך מאוד (ביחס לרדיוסו, השווה ל־ R) מלא הטעון בצפיפות מטען נפחית $\rho(r) = br$ (כאן r הוא המרחק מציר הגליל), $b > 0$.

1. מצא מהו השדה החשמלי בכל המרחב.
2. משחררים מטען $q < 0$ בעל מסה m מנקודה במרחק $R_0 > R$ מציר הגליל. מה תהיה מהירות החלקיק כאשר יפגע בציר הגליל?

פתרון:

את השדה החשמלי מחוץ לגליל $r > R$ נמצא בעזרת חוק גאוס האינטגרלי. בקואורדינטות גליליות, מסימטריית הבעיה, השדה יהיה: $\bar{E}(\bar{r}) = E(r)\hat{r}$. כדי למצוא את השדה ב־ $r > R$ ניקח מעטפת גלילית בעלת רדיוס r וגובה שרירותי hשצירה מתלכד עם ציר הגליל שלנו. השטף דרך המערכת עובר רק דרך המעטפת החיצונית (עליה השדה קבוע) ולא דרך הבסיסים:

$$\Phi = 2\pi rhE(r)$$

המטען הלכוד בה:

$$Q_{in} = 2\pi h \int_0^R br \cdot rdr = \frac{2}{3}\pi hbR^3$$

נשים לב שאכן קיבלנו יחידות של מטען. השדה שמתקבל אם כן, לפי חוק גאוס:

$$E(r) = \frac{bR^3}{3\epsilon_0 r} \quad r > R$$

בדומה לשדה הנוצר ע"י תיל טעון אינסופי.

את השדה בפנים נמצא בעזרת חוק גאוס הדיפרנציאלי:

$$div(\bar{E}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE(r)) = \frac{br}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{br^2}{3\epsilon_0} + \frac{C}{r}$$

את הקבוע C מוצאים מדרישת הרציפות ב־ $r = R$ (כאן צפיפות המטען סופית בכל מקום): $C = 0$.

$$E(r) = \frac{br^2}{3\epsilon_0} \quad r < R$$

חישוב מהירות החלקיק: נחשב את העבודה הכוללת שפועלת על החלקיק בתנועתו :

$$W = \int_{R_0}^{0} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \frac{bq}{3\epsilon_0}\left(\int_{R_0}^{R} \frac{R^3}{r}dr + \int_{R}^{0} r^2 dr\right) = \frac{bq}{3\epsilon_0}\left(R^3 ln\left(\frac{R}{R_0}\right) - \frac{R^3}{3}\right)$$

נשים לב שאכן קיבלנו יחידות של אנרגיה. כמו כן נשים לב שהעבודה חיובית. את המהירות נקבל כעת מ־

$$\frac{mv^2}{2} = W$$

3 הקשר בין האנרגיה האלקטרוסטטית והשדה החשמלי

כמו שראיתם בכתה, צפיפות האנרגיה (האנרגיה ליח' נפח) קשורה לשדה החשמלי ע"י $u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2$. האנרגיה הפוטנציאלית הכוללת של מערכת מטענים כלשהי שווה לאינטגרל הנפחי של הצפיפות הזאת על כל הנפח בו ישנו שדה חשמלי שנוצר על ידיה:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\iiint E^2 dV$$

3.1 דוגמא:

מהי האנרגיה האגורה בקליפה כדורית בעלת רדיוס פנימי a ורדיוס חיצוני b, ובה צפיפות המטען הינה $\rho(r) = \rho_0 \cdot \frac{r}{a}$?

פתרון:

תחילה נחשב את השדה החשמלי, בעזרת חוק גאוס: בבעיה ישנה סימטריה כדורית, ובכל מקום $\bar{E}(\bar{r}) = E(r)\hat{r}$. עבור $r < a$: חוק גאוס נותן $4\pi r^2 E = 0 \to E = 0$. באזור בו $a < r < b$ מתקיים $4\pi r^2 E = 4\pi K Q(r)$. המטען הכלוא:

$$Q(r) = 4\pi \int_a^r \rho(r')r'^2 dr' = \frac{4\pi\rho_0}{a}(\frac{r^4}{4} - \frac{a^4}{4})$$

מכאן מקבלים את השדה באזור זה:

$$E(r) = \frac{K\rho_0}{4a}(r^2 - \frac{a^4}{r^2})$$

לבסוף, באזור בו $b < r$, המטען הלכוד במעטפת יהיה המטען כולו, $Q_T = \frac{4\pi\rho_0}{a}(\frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4})$ והשדה הוא

$$E(r) = \frac{KQ_T}{r^2}$$

נשים לב שהשדה שקיבלנו רציף - נכון כל עוד אין סינגולריות בהתפלגות המטען. כעת, האנרגיה האגורה בשדה זה:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\iiint E^2 dV = \frac{1}{2K}\int E(r)^2 r^2 dr = \frac{K\rho_0^2}{32a^2}\int_a^b (r^2 - \frac{a^4}{r^2})^2 r^2 dr + \frac{KQ_T^2}{2}\int_b^\infty \frac{dr}{r^2} =$$
$$= \frac{K\rho_0^2}{224a^2}(b^7 - a^7) - \frac{K\rho_0^2 a^2}{48}(b^3 - a^3) + \frac{K\rho_0^2 a^6}{32}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) + \frac{KQ_T^2}{2b}$$

אם לוקחים את עובי הקליפה ל-0, נשארים רק עם האיבר האחרון (אם שומרים על מטען קבוע, אחרת גם האיבר הזה ישאף ל-0).

מטען נקודתי

אם ננסה להשתמש בטכניקה זו עבור מטען נקודתי ניתקל בבעיה: האינטגרל על השדה מתבדר אם הגבול התחתון הוא אפס. זה אומר שנדרשת אנרגיה אינסופית לאגירת מטען סופי בנפח אפסי - לא מפתיע. כעת, אם אנחנו מדברים על פרוטון - הוא אינו בדיוק נקודתי, יש לו מבנה פנימי - הוא מורכב מחלקיקים בסיסיים יותר (3 קווארקים), ולכן ניתן להתייחס אליו כנקודתי רק עד סקלת אורך של כ- $10^{-15}m$, ואח"כ כוחות אחרים שולטים בזירה. כל עוד אנחנו עוסקים בסקלות גדולות יותר, ניתן להתייחס לאנרגיה העצמית של הפרוטון כגודל קבוע ונתון הנקבע ע"י תכונותיו הפנימיות, וקביעתו היא מעבר לעיסוקינו בקורס. המקרה של האלקטרון, שהוא חלקיק יסודי, מסובך עוד יותר. תיקוני אנרגיה עצמית של אלקטרון הם תחום מעניין בתורת הקוונטים. נשאיר את הדיון בהם לקורסים מתקדמים יותר. בתרגיל הבית תראו כי הנוסחא לעיל לחישוב האנרגיה האלקטרוסטטית של מערכת מטענים היא קונסיסטנטית עם ההגדרה הדיסקרטית מתחילת השעור, אם מתעלמים מהאנרגיה העצמית של המטענים הנקודתיים.

3.2 דוגמא:

נתון משטח אינסופי בעל עובי $3a$. השלישים הימני והשמאלי שלו (כל אחד בעובי a) טעונים שניהם בצפיפות מטען אחידה ρ, והשליש האמצעי (גם הוא בעובי a) טעון בצפיפות מטען אחידה -2ρ.

1. חשב את השדה החשמלי בכל מקום במרחב.
2. חשב את האנרגיה האלקטרוסטטית ליחידת שטח במערכת.

פתרון:

1. נבחר מערכת צירים בה המישור ניצב לציר x ומישור yz נמצא במרכז המישור (כלומר, המישור נמצא ב־ $-1.5a \le x \le 1.5a$). מהסימטריה של הבעיה, השדה יהיה תלוי רק ב־x ויהיה לו רק רכיב x: $\bar{E} = E(x)\hat{x}$. נחשב תחילה את השדה מחוץ למישור. נבחר מעטפת גאוסית מלבנית (תיבה) בעלת אורך $2h$ (לאורך ציר x) ובעלת פאות המקבילות למישור בעלות שטח A ובמרחק זהה משני צדי המישור. השטף דרך שתי פאות אלה יהיה זהה ושווה ל־ $\Phi = E(h) \cdot A$ כאשר $2h$ הוא אורך התיבה שבחרנו (המימד הניצב לפאות). סה"כ המטען הלכוד בתיבה שלנו הוא אפס (המטען על המישור האמצעי בדיוק מקזז את מטען המישורים הצדדיים) ולכן מחוק גאוס השדה הוא אפס. זה נכון לכל $1.5a < h$, כלומר:

$$E(x) = 0 \quad 1.5a < |x|$$

כעת, באזור בו $-1.5a < x < -0.5a$ נשתמש בחוק גאוס הדיפרנציאלי: מתקיים $div(\bar{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, ומכאן ש־ $E = \frac{\rho}{\epsilon_0}x + C_1$. את הקבוע נמצא לפי מה שאנחנו כבר יודעים ורציפות השדה: $E(-1.5a) = 0 \to C_1 = 1.5a\frac{\rho}{\epsilon_0}$ ומכאן:

$$E(x) = \frac{\rho}{\epsilon_0}(x + 1.5a) \quad -1.5a < x < -0.5a$$

בתוך המישור האמצעי $-0.5a < x < 0.5a$: באותה דרך, $E = -2\frac{\rho}{\epsilon_0}x + C_2$, ומדרישת הרציפות: $E(-0.5a) = \frac{\rho}{\epsilon_0}a \to C_2 = 0$

$$E(x) = -2\frac{\rho}{\epsilon_0}x \quad -0.5a < x < 0.5a$$

מקבלים שהשדה ב־$x = 0$ הוא 0, הגיוני.
במישור הימני $0.5a < x < 1.5a$: שוב באותה דרך, $E = \frac{\rho}{\epsilon_0}x + C_3$, $E(0.5a) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}a \to C_3 = -1.5a\frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$E(x) = \frac{\rho}{\epsilon_0}(x - 1.5a) \quad 0.5a < x < 1.5a$$

וזה גם מסכים עם התאפסות השדה ב־$x = 1.5a$. בסה"כ קיבלנו שדה שמצביע פנימה למרכז המשטח (בהינתן ש־$\rho > 0$). השדה לניארי ב־x ורציף אך בעל קפיצה בנגזרת, עקב אי הרציפות בהתפלגות המטען.

2. צפיפות האנרגיה:

$$u = \begin{cases} \frac{\rho^2}{2\epsilon_0}(x + 1.5a)^2 & -1.5a < x < -0.5a \\ 4\frac{\rho^2}{\epsilon_0}x^2 & -0.5a < x < 0.5a \\ \frac{\rho^2}{2\epsilon_0}(x - 1.5a)^2 & 0.5a < x < 1.5a \end{cases}$$

נשים לב שהיחידות הן אכן יחידות של אנרגיה חלקי נפח. בכל מקום אחר השדה הוא אפס ולכן כך גם צפיפות האנרגיה. כדי לקבל אנרגיה ליחידת שטח נבצע אינטגרציה לאורך ציר ה־x:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 dx = \int_{-1.5a}^{-0.5a} \frac{\rho^2}{2\epsilon_0}(x + 1.5a)^2 dx + \int_{-0.5a}^{0.5a} 2\frac{\rho^2}{\epsilon_0}x^2 dx + \int_{0.5a}^{1.5a} \frac{\rho^2}{2\epsilon_0}(x - 1.5a)^2 dx =$$
$$= \frac{\rho^2 a^3}{6\epsilon_0} + \frac{\rho^2 a^3}{3\epsilon_0} + \frac{\rho^2 a^3}{6\epsilon_0} = \frac{2}{3}\frac{\rho^2 a^3}{\epsilon_0}$$

אם המערכת לא הייתה נייטרלית בסה"כ, אז מחוץ למישור היה שדה קבוע והאנרגיה ליחידת שטח הייתה מתבדרת.