

קוסמולוגיה הרגילה 2

הצרכים

יש 2 הנחות יסודיות בקוסמולוגיה:

① היקבון ה'יסודי': חוקי הפיזיקה זהים בכל מרחבות הייחוס.
(בפרט, יש משוואת איינשטיין $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$)

② ה'היקבון הקוסמולוגי': The cosmological Principle

ה'יקום הוא הומוגני ואיזוטרופי (כלומר מ'קואלים מ'יזוקים' וכלל כיוונים מ'יזוקים)

למעשה, אמתנו כדאיים את הצפייה המקובלת הארץ שהיקום נראה הומוגני ואיזוטרופי, ואנו מניחים כי הקבר (כאן הכלל היקום).

מה'היקבון הזה, כאילו למטרית ה'כללית ביותר' של היקום יש צורה מאד ספציפית:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [du^2 + S_r^2(u) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]$$

למטרית ה'צ' קוראים מטריקת FRW

Friedman, Robertson, Walker

בקובץ נפרד שה'עלית' לאור, אנו נראה איך עוקבים אחר כוכבי המטרית ה'צ' ומשתמשים במשוואת איינשטיין המקשרת בין השיאומטרית של היקום לבין צפיית המסה/אנרגיה ב'יקום, כפי שקבלת את 2 משוואות פרידמן והמשוואות אחרות המ'פלטות' היקום. כאן, נציג רק את התוצאה הסופית.

לפניכן, אזכיר של $a(t)$ קוראים ה'expansion factor'

(הוא מ'שאר' את עוקב היקום יחסית לעצמו, קשה

ה'ת' מ'פלטות' אנו $t=0$ זה המ'פ' השקול, ו $t=T_H$

זה עכשיו ($T_H = 13.7 \text{ Gyr}$)

$$a(t=0) = 0, a(t=T_H) = l$$

$$\ddot{a} = - \frac{G \cdot \left(\frac{4\pi}{3} \frac{(\rho + 3p) \cdot a^3}{c^2} \right)}{a^2} + \frac{\Lambda a}{3}$$

שונה, נבחרה המקום Λ (גם ת'יקורת של אחוז חלקי זמן
 כבידה) $\frac{G \cdot \Lambda}{c^2}$ (ואז ρ : יש ת'יקורת של אנרגיה
 ת'יקורת נסת, כמו $\rho - p$) ונקבל:

~~$$\ddot{a} = - \frac{G \cdot \left(\frac{4\pi}{3} \frac{(\rho + 3p) \cdot a^3}{c^2} \right)}{a^2} + \frac{\Lambda a}{3}$$~~

$$\ddot{a} = - \frac{G \cdot \left(\frac{4\pi}{3} a^3 \right) \left(\frac{\rho + 3p - \Lambda}{c^2} \right)}{a^2}$$

~~מקובל מאוד~~ ~~מקובל מאוד~~ ~~מקובל מאוד~~ ~~מקובל מאוד~~
 ב משוואת פנרוגה חסך אינטואיטיבית

ב משוואת פנרוגה חסך אינטואיטיבית!
 התפשטות נבחרת בשלם השפיעות של החומר והקרינה
 ב'יקום שבא מהאיבר $(\rho + 3p)$ (אנרגיה קשר שפיעות צינורית
 וחסות).

מ'זק שני והתפשטות מואצת השלם צפיפות האנרגיה של
 הריק Λ , שתצפיות אומרות לנו שביא חיובית, אך קטנה.
 התרחבות בין ההואה לבין ההואה ~~הואה~~ קובעת את
 הקינמטיקה של התפשטות ה'יקום!

כתובות על משוואת פרדמן

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

עבור כוכבי הלכת והמסה איננה קבועה, יש תכונה נחמדר ונקראת:

$$P = P_m + P_{rad}$$

שיעור המסה-אינרציה של חומר אחר (כגון) נשמר קיים $P_m \propto a^{-3}$

כך גם: $P_m a^3 = const$

שיעור המסה היחסית בקיום (steady-state) נחמד

$$P_r a^4 = const \quad \Leftrightarrow N = \frac{P_r a^3}{h\nu} \propto \frac{P_r a^3}{a^{-1}} \propto P_r a^4$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$P_r \propto a^{-4}$$

$P_m \Rightarrow P_r$ היום, מתברר, וקדם שמתקיים

אבל בקיום הנוקדים ($Z \gtrsim 3,100$) המצבה היא הפוך וקוראים הקרינה שלטה.

אלהנו (כסוף התחום שבו החומר רגיל) ($Z \lesssim 3000$)

$$P_m = P_{m0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \quad (P_{m0} = 1, a_0 = a_{today})$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3 a^3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

$$a^* = \frac{4\pi G \rho_0 a_0^3}{3} \quad \text{נקודה}$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{2a^*}{a^3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

נקודה II: $\Lambda = 0$ כשחומר הקבוצה הקוסמולוגית נטית כיום

עבור כוכבי הלכת האינרציה של החומר ($\Lambda' \ll \rho + 3\rho$)

$$\dot{a}^2 = \frac{2a^*}{a} - k$$

כגון המצב בקיום הנוקדים $P_m \propto a^{-3}$, $\Lambda = const$ / כן

$k=0$ או $k \neq 0$ מסוים $k=0$ נ"ל $\dot{a}^2 = 2a^*$ (1)

$$\dot{a}^2 = \frac{2a^*}{a} \Rightarrow \frac{da}{dt} = \sqrt{2a^*} a^{-\frac{1}{2}}$$

$$a^{\frac{1}{2}} da = \sqrt{2a^*} dt$$

$$\boxed{a(t=0)=0, C=0} \Leftrightarrow \frac{2}{3} a^{3/2} = \sqrt{2a^*} t + C$$

$$\boxed{a(t) = \left(\frac{3}{2} \sqrt{2a^*}\right)^{2/3} t^{2/3} \propto t^{2/3}}$$

נ"ל $k = \pm 1$ גורם $\dot{a}^2 = 2a^* - ka^2$ (2)

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \Rightarrow \boxed{\dot{a} = \frac{da}{dt} = \frac{da}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{dt} = a' \cdot \frac{1}{a}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{2a^*}{a} - k$$

$$(a')^2 = 2a^*a - ka^3$$

$$2a'a'' = 2a^*a' - 2kaa'a'$$

$$a'' = a^* - ka \Rightarrow \boxed{a'' + ka = a^*}$$

a^* גורם $\dot{a}^2 = 2a^* - ka^2$ " $\dot{a}^2 = 2a^* - ka^2$ נ"ל

$$a_h(\eta) = Ae^{i\sqrt{k}\eta} + Be^{-i\sqrt{k}\eta} \quad \text{הקוסינוס והסינוס}$$

$$\left(\frac{a^*}{k} = ka^* \Leftrightarrow k = \pm 1\right) a_p = \frac{a^*}{k} = \text{const} \quad \text{פתרון פרטי}$$

$$\boxed{a(\eta) = Ae^{i\sqrt{k}\eta} + Be^{-i\sqrt{k}\eta} + ka^*} \quad \text{הפתרון הכללי}$$

$$\eta(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

∫ dt / a(t)

⊕

$$a(t \rightarrow 0) = a(\eta \rightarrow 0) = 0$$

: p d l

$$\text{⊖ } a'(\eta \rightarrow 0) = a \cdot a'(\eta \rightarrow 0) = 0$$

: p d l

$$\text{⊕ } A + B + k a^* = 0$$

: p d l

$$\text{⊖ } i\sqrt{k} A - i\sqrt{k} B = 0$$

$$\Rightarrow A = B = -\frac{1}{2} k a^*$$

$$a(\eta) = a^* k \left[1 - \frac{e^{i\sqrt{k}\eta} + e^{-i\sqrt{k}\eta}}{2} \right]$$

$$C_k(\eta) = \begin{cases} \cos(\eta) & \text{if } k=+1 \\ \cosh(\eta) & \text{if } k=-1 \end{cases} \quad \text{: p d l}$$

$$a(\eta) = a^* k [1 - C_k(\eta)]$$

: p d l

$$a(\eta) = \begin{cases} a^* (1 - \cos(\eta)) & \text{if } k=+1 \\ -a^* (1 - \cosh(\eta)) & \text{if } k=-1 \end{cases}$$

$$dt = a d\eta$$

t(η) ∫ a dη

$$\boxed{t} = \int a d\eta = \int a^* k [1 - C_k(\eta)] d\eta = a^* k [\eta - S_k(\eta)]$$

$$S_k(\eta) = \begin{cases} \sin(\eta) & k=+1 \\ \sinh(\eta) & k=-1 \end{cases} \quad \text{: p d l}$$

$C_k(\eta) \rightarrow 1 - \frac{k}{2} \eta^2$? $a(t)$ האם מתאונקת η בזמן
 $t \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$ בזמן קטן הזווית קטנה

$S_k(\eta) \rightarrow \eta - \frac{k}{6} \eta^3$

\Downarrow

$a(\eta \rightarrow 0) = a^* k [1 - (1 - \frac{k}{2} \eta^2)] = a^* \frac{k^2}{2} \eta^2 = \frac{a^*}{2} \eta^2$ ($k = \pm 1$ הזווית קטנה)

$t(\eta \rightarrow 0) = a^* k [\eta - (\eta - \frac{k}{6} \eta^3)] = \frac{a^* k^2}{6} \eta^3 = \frac{a^*}{6} \eta^3$

$\Rightarrow \eta = \left(\frac{6}{a^*} t\right)^{1/3}$

$a(t) = \frac{a^*}{2} \left(\frac{6}{a^*}\right)^{2/3} t^{2/3} = \left[\frac{a^{*3/2}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{6}{a^*}\right]^{2/3} t^{2/3}$

$a(t) = \left(\frac{3}{2} \sqrt{2} a^*\right)^{2/3} \cdot t^{2/3}$

$k=0$ הזווית קטנה הזמן קטן

$\Delta s, \rho_m \gg \rho_{rad}$ $\Gamma = 1$ הזמן קטן הזווית קטנה
הזמן קטן הזווית קטנה

$\eta \rightarrow \infty$ הזמן גדול הזווית גדולה

$k = -1: \left. \begin{aligned} a(\eta \rightarrow \infty) &= -a^* \left(-\frac{e^\eta}{2}\right) = \frac{a^* e^\eta}{2} \\ t(\eta \rightarrow \infty) &= -a^* \left(-\frac{e^\eta}{2}\right) = \frac{a^* e^\eta}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a(t \rightarrow \infty) = t$

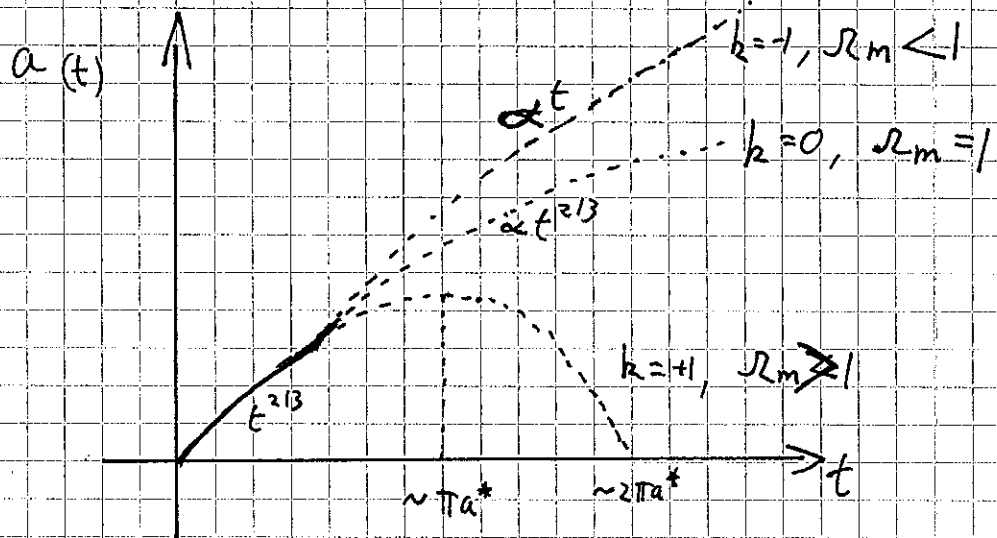
$k = +1: \cancel{a < 0}$ $a < 0$ הזמן קטן הזווית קטנה

$t(\eta \rightarrow 2\pi) \approx a^* \eta \rightarrow \eta = \frac{t}{a^*}$ $\eta_{max} \approx 2\pi$ הזמן קטן

$a(t) = a^* \left(1 - \cos\left(\frac{t}{a^*}\right)\right) \Rightarrow$ הזמן קטן הזווית קטנה

$\eta = \pi, t = \pi a^*$ נקודת סינגולריות (התנגשות)

$\eta = 2\pi \Rightarrow t = 2\pi a^*$ נקודת "big crunch"



$\Omega_m = \frac{\rho}{3H^2/8\pi G}$, $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ קבוע הריבוי

"סוג" קבוע הריבוי Ω_m תלוי בהתפלגות המסה והמרחק ρ ובהתפלגות המסה והמרחק ρ .

$k=0$	-	היקום שטוח	$\Omega_m = 1$	סוג	} (1=0)
$k=+1$	-	היקום סגור	$\Omega_m > 1$	סוג	
$k=-1$	-	היקום פתוח	$\Omega_m < 1$	"	

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{kC^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

התפלגות המסה והמרחק ρ (סוג $\rho_m \rightarrow \rho_{rad}$)

$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$

$$\Rightarrow H^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{k^2 C^2}{a^2}$$

$$1 = \frac{8\pi G \rho}{3H^2} - \frac{k^2 C^2}{\dot{a}^2} \equiv \Omega_m - \frac{k^2 C^2}{\dot{a}^2}$$

$$\boxed{\Omega_m = 1 + \frac{k^2 C^2}{\dot{a}^2}}$$

