תרגול 13 - חוק פארדיי והשראות

1 פתרון נומרי של משוואת פואסון - שיטת הרלקסציה

כמו בכל שנה, גם השנה יכלול התרגיל הנומרי פתרון בעיה עם תנאי שפה ידועים. החידוש המרכזי יהיה שהשנה הבעיה תכלול מטענים בתוך האזור אותו אנו פותרים, כלומר נעבוד עם משוואות פואסון ולא עם משוואת לפלס. נסביר כיצד הדבר נעשה.

נתונה הבעיה הבאה: ישנה תיבה בנפח V שציריה מכונים $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$. אנחנו יודעים את הפוטנציאל בכל נקודה על פאותיה וכן את התפלגות המטענים בפנים ועלינו למצוא את הפוטנציאל בכל נקודה.

בשלב הראשון ברור כי עלינו לחלק את התיבה לפיקסלים - נגדיר אם כן את גודל הפיקסל להיות δ^3 ונאמר כי ישנם N_j פיקסלים לאורך ציר $\hat{j}$ ($j \in \{x,y,z\}$).
כעת נניח שאנחנו לא יודעים מהו הפוטנציאל בפיקסל מסויים $\phi(x,y,z)$ אבל אנחנו כן יודעים מהו הפוטנציאל בכל השכנים של התא הזה. כלומר, אם נגדיר את הפוטנציאל בתא בתור $\phi(r)$, אז נאמר כי אנחנו יודעים מהו הפוטנציאל $\phi(r\pm\delta\hat{j})$. כעת, נשים לב כי:

$$\phi(r\pm\delta\hat{j})=\phi(r)\pm\frac{\partial\phi}{\partial j}\delta+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial j^2}\delta^2$$

ואם נסכום את שתי המשוואות עבור $\pm$ ונבודד את $\phi(r)$ נמצא כי:

$$2\phi(r)=\phi(r+\delta\hat{j})+\phi(r-\delta\hat{j})-\frac{\partial^2\phi}{\partial j^2}\delta^2 \tag{1}$$

המשוואה הזו עדיין לא מספיקה לנו כדי לדעת את $\phi(r)$, הבעיה היא כי אמנם אנחנו יודעים את $\phi(r\pm\delta\hat{j})$ אך איננו יודעים את $\partial^2\phi/\partial j^2$. כדי לדעת את הנגזרת השניה, נעשה שימוש במשוואת פואסון. נשים לב כי אמנם איננו יודעים מהו $\partial^2\phi/\partial j^2$, אך אנחנו כן יודעים כי:

$$\vec{\nabla}^2\phi=\sum_{j\in\{x,y,z\}}\frac{\partial^2\phi}{\partial j^2}=-4\pi K\rho(r) \tag{2}$$

לכן, אם נסכום שלוש משוואות מהצורה של משוואה 1 עבור $j=x,y,z$ נקבל

$$6\phi(r)=\left[\sum_{j\in\{x,y,z\}}\phi(r+\delta\hat{j})+\phi(r-\delta\hat{j})\right]-\sum_{j\in\{x,y,z\}}\frac{\partial^2\phi}{\partial j^2}\delta^2$$

כעת, נחליף את הלפלסיאן בצפיפות המטען ע"פ משוואה 2 וכך (לאחר חלוקה ב-6) נסיק בסה"כ:

$$\phi(r)=\frac{1}{6}\sum_{j\in\{x,y,z\}}\left[\phi(r+\delta\hat{j})+\phi(r-\delta\hat{j})\right]+\frac{2\pi}{3}K\rho(r)\delta^2 \tag{3}$$

התוצאה הזו אמורה להיות מובנת לנו היטב. בהיעדר צפיפות מטען, זהו פשוט עקרון הערכים הממוצעים - הערך של הפוטנציאל בבנקודה r הוא ממוצע הערכים של כל השכנים שלה. התוספת המתייחסת ל-$\rho(r)$ פשוט מאפשרת לנקודה טעונה להיות מקור של פוטנציאל והפקטור הספציפי שקיבלנו פשוט נובע מהגאומטריה של הפיקסלים (אגב, תוכלו לראות שהוא מסתדר מבחינת יחידות).
בפועל כמובן לא יקרה שאיננו יודעים את הפוטנציאל בנקודה מסויימת אך יודעים את הפוטנציאל בכל שכנותיה. מה שכן, יהיה לנו ניחוש שהושג בצעד ה-n ל-$\phi_n(r\pm\delta\hat{j})$ ועל סמך ניחוש זה נמצא בצעד ה-$n+1$ את $\phi_{n+1}(r)$ להיות:

$$\phi_{n+1}(r)=\frac{1}{6}\sum_{j\in\{x,y,z\}}\left[\phi_n(r+\delta\hat{j})+\phi_n(r-\delta\hat{j})\right]+\frac{2\pi}{3}K\rho(r)\delta^2 \tag{4}$$

אז איך פותרים בעיה ממשית - נניח את התיבה עליה דיברנו:

- בשלב הראשון מחלקים את המרחב לפיקסלים, אנחנו הצגנו כאן את המקרה הקרטזי אך לא תמיד זו תהיה הבחירה החכמה ביותר ־ באופן כללי יש לבחון באיזו מערכת קורדינטות חכם להשתמש וכיצד משתנות המשוואות בהתאם. במקרה של התרגיל השנה תוכלו בהחלט לבחור בקורדינטות קרטזיות.
- בשלב השני, מנחשים פתרון. הפתרון חייב לקיים את תנאי השפה (כלומר הפוטנציאל של הפיקסלים שעל השפה מכוון לערך הידוע שלהם) ומעבר לזה פשוט מציבים משהו.
- בשלב השלישי מתחילים למצוא את הערך של הפוטנציאל בנקודות שאינן על השפה על פי משוואה 4 (או מקבילה דומה לה במקרה של סימטריה לא קרטזית). בכל שלב מוצאים את הפוטנציאל של הנקודות שאינן על השפה (את פוטנציאל הנקודות שעל השפה איננו משנים) ובהדרגה יגיע ערך הפוטנציאל בכל נקודה לכדי פתרון שגם מתאים לתנאי השפה וגם מקיים את משוואה 3 כלומר את משוואת פואסון.

כמה הערות:

- חייבים לשים לסימולציה תנאי עצירה מסויים (נניח, עצור לאחר שלא חל שינוי בפוטנציאל של אף נקודה בערך שגדול מ־1%) ־ ללא זה הסימולציה לא תעצר לעולם.
- במידה והייתה התכנסות לפתרון מסויים, הרי הוא בהכרח הפתרון הנכון ־ זאת מתוך משפט היחידות על פתרון משוואת פואסון עם תנאי שפה ידועים. והיה ולא הגעתם לפתרון מתכנס, הדבר החכם הוא קודם כל לוודא שהסימולציה שלכם נכונה ־ ככלל האלגוריתם הזה מתכנס. אם אתם משוכנעים שכתבתם הכל נכון ובכל זאת אין התכנסות, עיצרו את הסימולציה ונסו תנאי התחלה אחר שכן יוביל להתכנסות.
- המלצה לתרגיל זה ולכל עבודה נומרית שתעשו בעתיד ־ תתחילו עם רזולוציה נמוכה בה הסימולציה רצה מהר ואתם יכולים לעקוב אחרי מה קרה. רק כאשר תהיו משוכנעים כי הסימולציה שלכם פועלת היטב, ערכו את החישוב ברזולוציה גבוהה.

2 חוק פארדיי

2.1 הסבר

כוח אלקטרו מניע (כא"מ) מוגדר להיות העבודה ליחידת מטען על מסלול סגור:

$$\varepsilon = \frac{1}{q}\oint \vec{F}d\vec{l}$$

ע"פ חוק פארדיי, שטף מגנטי משתנה בזמן יוצר כא"מ מושרה:

$$\varepsilon_{\partial S} = -\frac{\partial \Phi_S}{\partial t}$$

כאשר $\varepsilon_{\partial S}$ הוא הכא"מ לאורך מסילה המקיפה משטח S ו־Φ_S הוא השטף המגנטי דרך משטח שגודלו S. ניתן להביא חוק זה לצורה הדיפרנציאלית שלו ע"י שימוש בחוק סטוקס:

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})d\vec{S} = \oint_{\partial S}\vec{E}d\vec{l} = \frac{1}{q}\oint_{\partial S}\vec{F}d\vec{l} = \varepsilon_{\partial S} = -\frac{\partial \Phi_S}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_S\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)d\vec{S}$$

ובסה"כ נסכם:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \varepsilon_{\partial S} = -\frac{\partial \Phi_S}{\partial t} \tag{5}$$

נשים לב כי המינוס במשוואה זו נקבע ע"י כלל יד ימין, נניח שדה מגנטי הולך ומתחזק בכיוון $\hat{z}$ בנוכחות לולאת זרם עגולה במישור הניצב. כיוון שהשדה הולך ומתחזק השטף המגנטי דרך הלולאה הולך וגדל כלומר $-\partial\Phi/\partial t < 0$ ולכן $\varepsilon < 0$. $\varepsilon < 0$ אומר שהזרם יהיה שלילי, כלומר כאשר האגודל הימני מצביע לכיוון הניצב למישור הלולאה (כיוון $\hat{z}$) מורות האצבעות את הכיוון החיובי של $\hat{\phi}$ ובפועל הזרם יהיה בכיוון ההפוך.

בהרבה מקרים קביעת הסימן עשויה להיות מבלבלת וכדי לוודא שלא טעינו חכם להשתמש בחוק לנץ לפיו הזרם שנוצר יוצר שדה מגנטי הפועל כנגד השינוי בשטף המגנטי. כך למשל במקרה שלנו הזרם שכיוונו $-\hat{\phi}$ ייצור שדה מגנטי שכיוונו $-\hat{z}$, כלומר יתנגד לשינוי בשדה המגנטי ההולך וגדל.

2.2 טבעת בשדה מגנטי משתנה בזמן

טבעת בעלת שטח חתך S והתנגדות R מוצבת בשדה מגנטי $B = B_0(t/T)\hat{z}$. הנח כי הטבעת תמיד מקבילה למישור xy ומצא את גודלו וכיוונו של הזרם בכל רגע נתון.

טוב, על פי הגדרה $\Phi = \int \vec{B}d\vec{S} = SB_0(t/T)$, לכן

$$\varepsilon = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{SB_0}{T}$$

ומשמעות הדבר כי הזרם הוא $I = -\frac{SB_0}{RT}$. באשר לכיוון הזרם, נשים לב כי $\vec{B}$ בכיוון $\hat{z}$. לכן הכיוון של ε הוא ע"פ כלל יד ימין הכיוון $-\hat{\theta}$ (כיוון האצבעות הוא כיוון $\hat{\theta}$ ובגלל המינוס יש לקחת את הכיוון ההפוך). המשמעות היא אם כן כי I גם הוא בכיוון $-\hat{\theta}$ והדבר מסכים עם חוק לנץ.

2.3 מוט מחליק

נתונים שני תיילים מוליכים מקבילים במרחק a האחד מהשני. נאמר כי מיקומי התיילים הם ב־$y = 0$ וב־$y = a$. התיילים מחוברים זה לזה ב־$x = 0$ באמצעות נגד שהתנגדותו R (אין התנגדויות נוספות במערכת). על התיילים מחליק ללא חיכוך, מוט מוליך בעל מסה m (כלומר המוט, התיילים והנגד סוגרים לולאת זרם מרובעת). מיקומו של המוט $x(t)$. בנוסף ידוע כי במרחב כולו שדה מגנטי אחיד $B\hat{z}$ וכן נתון כי בזמן $t = 0$ מיקומו של המוט אינו ידוע אך מהירותו $v_0\hat{x}$.

2.3.1 מהי מהירותו של המוט כפונקציה של הזמן?

התיילים הנגד והתייל יוצרים בסה"כ קונפיגורציה מלבנית ששטחה $ax(t)$ ולכן השטף המגנטי דרכה הוא $\Phi = Bax(t)\hat{z}$. לפיכך נוכל למצוא את ε ע"פ חוק פארדיי:

$$\varepsilon = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\partial(Bax(t))}{\partial t} = -Bav(t)$$

ובהנתן ε נוכל למצוא את הזרם $I = \varepsilon/R$:

$$I = -\frac{Ba}{R}v(t)\hat{\theta}$$

מתוך כך שידוע לנו כיוון הזרם הכולל בלולאה, אנו יכולים לדעת כי כיוון הזרם במוט $-\hat{y}$ (אפשר גם למצוא ע"פ חוק לנץ) ונסכם:

$$I_{\text{pole}} = -\frac{Ba}{R}v(t)\hat{y} \tag{6}$$

נשים לב כי על מוט אשר זורם בו זרם מסויים פועל כוח והכוח הזה (כך אנו מצפים) יגרום להאטת המוט.

נניח למשל חלקיקים בעלי מטען q בצפיפות אורכית λ הנעים בתיל בעל אורך L במהירות v. כמות המטען הכוללת שתעבור דרך חתך של התיל בפרק זמן dt היא $\lambda qvdt$ ולכן הזרם הוא:

$$\vec{I} = \lambda q\vec{v}$$

מצד שני, נוכל לחשב את הכוח הפועל על התיל כסכום הכוחות הפועלים על המטענים השונים. על כל מטען פועל כוח $F = q\vec{v} \times \vec{B}$ לכן הכוח הכללי הפועל על המוט (שבו λL מטענים) הוא: $F = \lambda qL\vec{v} \times \vec{B}$. נשים לב כי $\vec{I} = \lambda q\vec{v}$ ולכן בסה"כ הכוח הפועל על המוט הוא: $F = L\vec{I} \times \vec{B}$.

נחזור כעת למקרה שלנו. מצאנו כי $I_{\text{pole}} = -(Ba/R)v(t)\hat{y}$ ולכן הכוח הפועל על המוט הוא:

$$F = aI_{\text{pole}} \times \vec{B} = -\frac{B^2a^2}{R}v(t)(\hat{y} \times \hat{z}) = -\frac{B^2a^2}{R}v(t)\hat{x}$$

ואת הכוח הזה נוכל להציב במשוואת התנועה ולקבל (כאשר המשוואה כולה על ציר ה־$\hat{x}$):

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2a^2}{R}v(t) \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0e^{-\frac{B^2a^2t}{Rm}}$$

ונסכם:

$$v(t) = v_0e^{-t/\tau} \quad \text{where} \quad \tau = \frac{Rm}{B^2a^2} \tag{7}$$

שימו לב כי היחידות של τ נכונות (Q מסמן מטען, v מסמן מהירות, F מסמן כוח, W מסמן אנרגיה ו־I מסמן זרם):

$$[\tau] = \left[\frac{Rm}{B^2a^2}\right] = \left[\frac{RmQ^2v^2}{B^2Q^2v^2a^2}\right] = \left[\frac{RmQ^2v^2}{F^2a^2}\right] = \left[\frac{mv^2}{Fa}\right]\left[\frac{RQ^2}{Fa}\right] =$$

$$\left[\frac{W}{W}\right]\left[\frac{RQ^2}{W}\right] = \left[\frac{RQ^2}{RI^2t}\right] = \left[\frac{Q^2}{(Q/t)^2t}\right] = \left[\frac{t^2}{t}\right] = [t]$$

2.3.2 הראו בחישוב מפורש שכל איבוד אנרגיית המוט היא דרך הנגד.

נחשב את העבודה הכוללת על הנגד עד לרגע t:

$$W_R(t) = \int_0^t dt'\ I^2 R = \frac{B^2a^2}{R}\int_0^t dt'\ v(t')^2 = \frac{B^2a^2}{R}\int_0^t dt'\ v_0^2 e^{-2t/\tau} = \frac{\tau B^2 a^2}{2R}\left(v_0^2 - v(t)^2\right) = \frac{m}{2}\left(v_0^2 - v(t)^2\right)$$

מצאנו אם כן כצפוי כי העבודה על הנגד עד לרגע מסויים t היא בדיוק האנרגיה הקינטית שאיבד המוט עד לאותו רגע.

3 השראות הדדית

3.1 הסבר ע"י שאלה פשוטה

נניח שתי כריכות תיל מעגליות מוליכות בעלות רדיוסים a_1, a_2 אשר המרחק בינהן הוא $D \gg a_1, a_2$ (נניח כי מרכזה של האחת בראשית הצירים ומרכזה של השניה בנקודה $D\hat{x}$). כאשר זורם זרם באחת, היא יוצרת שדה מגנטי באיזור של השניה וזה מחולל גם בה זרם. נרצה לחשב את האפקט.

נניח שבטבעת 1 (זו שבראשית) זורם זרם $I_1(t)\hat{\theta}$. ע"פ התוצאה מהשיעור שעבר, לולאת זרם ששטחה $\vec{S}$, משרה במרחק $r \gg a_1, a_2$ שדה מגנטי

$$\vec{B}(\vec{r}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{3(\vec{m}\hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{|r|^3} \quad \text{where} \quad \vec{m} \equiv I\cdot\vec{S}$$

במקרה שלנו המומנט המגנטי של הטבעת 1 הוא $\vec{m_1} = \pi a_1^2 I_1 \hat{z}$ ולכן:

$$\vec{B}(D\hat{x}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{3(\pi a_1^2 I_1(t)\hat{z}\hat{x})\hat{x} - \pi a_1^2 I_1\hat{z}}{|D|^3} = -\frac{\mu_0 a_1^2 I_1(t)}{4|D|^3}\hat{z}$$

לפיכך, השטף המגנטי דרך הטבעת השנייה הוא

$$\Phi(D)_2 = \int dS_2 B = -\frac{\pi\mu_0 a_1^2 a^2 I_1(t)}{4|D|^3}\hat{z}.$$

והכוח האלקטרומניע הוא $\varepsilon = -\dot{\Phi}_2$ כלומר:

$$\varepsilon_2 = \frac{\pi\mu_0 a_1^2 a_2^2}{4|D|^3}\dot{I}_1\hat{\theta} \quad ,^1$$

קל לראות כי $\varepsilon_2 \propto \dot{I}_1$ כאשר קבוע הפרופורציה תלוי במאפיינים הגיאומטריים של הבעיה. נגדיר אם כן:

$$\varepsilon_2 = M_{21}\dot{I} \quad , \quad M_{21} \equiv \frac{\pi\mu_0 a_1^2 a_2^2}{4|D|^3}$$

הגודל M_{21} קרוי מקדם ההשראות ההדדית.

נשים לב כי אם היינו בוחרים כי I_2 משתנה בזמן הרי שבאותו אופן, הזרם ב־I_1 היה מושפע. במקרה זה נוכל פשוט להחליף את האינדקסים ולקבל

$$\varepsilon_1 = M_{12}\dot{I}_2 \quad , \quad M_{12} \equiv \frac{\pi\mu_0 a_2^2 a_1^2}{4|D|^3}$$

נשים לב כי קיבלנו כי $M_{21} = M_{12}$. הדבר אינו מקרי וייתקיים תמיד, הוא תוצאה של משפט כללי הקרוי "משפט ההדדיות" (הוכחתם או תוכיחו בכיתה).

[1] הכיוון של $\dot{\Phi}$ יצא $-\hat{z}$ עבור $\dot{I}$ חיובי. לכן, אם $\dot{I}$ חיובי אז $\dot{\Phi}$ שלילי ומכאן ε חיובי ויגרור זרם עם כיוון $\hat{\theta}$.
כפי שאתם רואים די קל להתבלבל ולכן עדיף לקבוע את כיוון הזרם ע"פ חוק לנץ. השדה המגנטי בכיוון $-\hat{z}$ הולך וגדל אם $\dot{I}$ חיובי, לכן, הזרם המושרה יצור שדה מגנטי בכיוון $+\hat{z}$ - כלומר יהיה בכיוון $\hat{\theta}$.

3.2 שאלה קצת יותר מורכבת

נתונות שתי כריכות זרם ריבועיות בעלות אורכי צלע a ו־b בהתאמה ($b \gg a$). שתי כריכות הזרם מצוייות באותו מישור ולשתיהן מרכז משותף. מצא את ההשראות ההדדית בין שתי הכריכות.

נזכר בחוק ביו סבאר לפיו אלמנט תיל באורך dl תורם לעוצמת השדה במרחק r ממנו תרומה כוללת

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \ .$$

נגדיר את מרכזן של שתי לולאות הזרם להיות הנקודה $0,0$ וכך נוכל לחשב את השדה המגנטי המושרה במרכזה של הטבעת החיצונית:

$$\vec{B} = \oint_{\Box_b} d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{\Box_b}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

כאשר האינטגרל $\oint_{\Box_b}$ הוא האינטגרל על הריבוע b. נשים לב כי ככלל לכל צלע ב־$\Box_b$ יש תרומה כוללת לשדה המגנטי במרכז שכיוונה $\hat{z}$. יתר על כן, כל ארבע התרומות זהות מטעמי סימטריה ולכן נוכל פשוט לקחת את תרומת אחת הצלעות, נניח זו שמהנקודה $[b/2,-b/2]$ ועד הנקודה $[b/2,b/2]$ ולהכפיל ב־4 (נשים לב שבקטע זה הזרם אכן זורם מהנקודה שב־y שלילי אל הנקודה בעלת y חיובי). כך נסיק:

$$\vec{B} = \oint_{\Box_b} d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{\Box_b}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\frac{dy\hat{y}\times[-(b/2)\hat{x}-y\hat{y}]}{[(b/2)^2+y^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\frac{dy}{[(b/2)^2+y^2]^{3/2}}\right)\hat{z} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\left(\frac{4}{b^2}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\frac{dy}{\left[1+\left(\frac{y}{b/2}\right)^2\right]^{3/2}}\right)\hat{z} = \frac{2\mu_0 I}{\pi b}\left(\int_{-1}^{1}\frac{dy'}{[1+y'^2]^{3/2}}\right)\hat{z} \qquad \Bigg| \quad \text{where} \quad y' = \frac{y}{b/2}$$

את האינטגרל נוכל לפתור ע"י מעבר למשתנה $y' = \tan(\theta)$ (זהו מעבר בעל אינטרפטציה גאומטרית ברורה מאד) וכך נסיק:

$$dy' = \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \quad , \quad 1+y'^2 = \cos^{-2}\theta$$

ומכאן:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dy'}{[1+y'^2]^{3/2}} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos^{-2}\theta\ d\theta}{\cos^{-3}\theta} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta\ d\theta = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

ובסה"כ מצאנו

$$\vec{B} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi b}\hat{z}$$

כעת נעזר בהנחה כי $a \ll b$ ולפיכך השדה המגנטי בכל הריבוע a הוא אחיד למדי וכך נסיק

$$\Phi = (a^2)\cdot B_{\text{center}} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I a^2}{\pi b}$$

ומהדרישה $\varepsilon = M_{ab}\dot{I}$ נמצא כי:

$$M_{ab} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 a^2}{\pi b}$$

4 השראות עצמית

4.1 הסבר

נניח כעת סליל שאורכו b ורדיוסו a ($b \gg a$). בסליל יש סה"כ nb כריכות מעגליות. על הסליל לא מופעל כל שדה מגנטי אך הזרם דרכו מועלה בהדרגה. השאלה היא מהו הכא"מ המושרה על הסליל.

החישוב הוא הוא די פשוט - הסליל הוא בקירוב אינסופי ולכן שורר בו שדה מגנטי $B(t)=\mu_0 nI(t)$ (מחוק אמפר, ראיתם זאת בשיעור). כיוון שלסליל יש בסה"כ nb כריכות, ששטח כל אחת מהן πa^2 נמצא בסה"כ שהשטף הכולל דרך הסליל הוא $\Phi(t)=\pi\mu_0 n^2a^2bI(t)$ ולכן הכא"מ הכולל הוא

$$\varepsilon=\pi\mu_0 n^2a^2b\dot{I}$$

גם כאן, קיבלנו משוואה מהצורה $\varepsilon\propto\dot{I}$ אלא שכאן ה-ε וה-$\dot{I}$ הם של אותו אובייקט - לכן המקדם L, שיקיים

$$\varepsilon=L\dot{I}\quad\text{and in this case satisfies}\quad L=\pi\mu_0 n^2a^2b$$

קרוי מקדם ההשראות העצמית במקום מקדם ההשראות ההדדית.

4.2 מתי מוצדק להתעלם מההשראות העצמית?

בתחילת התרגול דיברנו על חוק פארדיי לפיו שינויים בשדה המגנטי מחוללים זרמים. בהמשך, דיברנו על כך שאם יש זרמים הם יוצרים שדות מגנטיים ובכך משפיעים על עצמם - אך בתחילת התרגול (נניח בשאלה על המוט) התעלמנו לחלוטין מאפקט זה. השאלה היא אם כן מתי מותר לנו להתעלם מההשראות העצמית של מערכת. כדי לענות על שאלה זו ננסה לפתור בעיה פשוטה שתתן לנו מושג מתי ההשראות העצמית חשובה ומתי לא.

נניח סליל בעל אורך b רדיוס a וצפיפות כריכות n (ציר הגליל הוא $\hat{z}$). כמו כן נניח שהתנגדותה של כל כריכה בסליל היא r (כלומר ההתנגדות הכוללת של הסליל היא $R\equiv nbr$). בגליל לא מוזרם זרם כלל וכלל, אך מופעל עליו שדה מגנטי חיצוני $B_E(t)\hat{z}$, וזה משרה זרם $I(t)$ אשר יגרור שדה מגנטי נוסף $B_I(t)$. נרצה למצוא את המשוואה שתתאר את הזרם ברגע t.

נתחיל בשדה המגנטי. בכל רגע מורכב השדה המגנטי משני רכיבים, חיצוני ומושרה: $B(t)=B_E(t)+B_I(t)$. השדה החיצוני $B_E(t)$ מוכנס למערכת כאילוץ, אך את $B_I(t)$ נוכל לחשב על סמך חוק אמפר:

$$B_I(t)=\mu_0 nI(t)$$

ע"פ פארדיי ואוהם:

$$I=-\frac{\varepsilon}{R}=-\frac{\dot{\Phi}}{R}$$

נשים לב כי השטף דרך הגליל הוא $nb\cdot\pi a^2\cdot B(t)$ וכך בסה"כ:

$$I=-\frac{\pi nba^2\dot{B}}{nbr}=-\frac{\pi a^2\dot{B}}{r}=-\frac{\pi a^2}{r}\left(\dot{B_E}+\dot{B_I}\right)$$

ולאחר שנציב $\dot{B_I}=\mu_0 n\dot{I}$ נמצא כי:

$$I(t)=-\frac{\pi a^2}{r}\left(\frac{\partial B_E}{\partial t}+\mu_0 n\frac{\partial I}{\partial t}\right)=-\left(\frac{\pi a^2}{r}\frac{\partial B_E}{\partial t}+\frac{\pi\mu_0 na^2}{r}\frac{\partial I}{\partial t}\right)\tag{8}$$

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית על התפתחות $I(t)$ בזמן כפונקציה של $B_E(t)$. נרצה לפתור את המשוואה במקרה של שדה מאלץ אוסילטורי. כיוון שאיננו יודעים האם הפתרון ע"י שימוש באקספוננטים מרוכבים מוכר או לא, נציג פתרון זה כאופציה א' ובצידו נציג גם פתרון באמצעות סינוסים וקוסינוסים כאופציה ב'. מעבר לזה שתי האופציות זהות.

4.2.1 אופציה א'

נניח כעת כי $B_E(t)=B_0e^{iwt}$. ננחש שאם התדר המאלץ הוא w אז גם התדר של הזרם יהיה כזה, נציב

$$B_E(t)=B_0e^{iwt}\quad,\quad I(t)=I_0e^{iwt}$$

ונמצא כי

$$I_0=-iw\left(\frac{\pi a^2B_0}{r}+\frac{\pi\mu_0 na^2I_0}{r}\right)$$

ולפיכך:

$$I_0\left(1+\frac{i\pi\mu_0 na^2w}{r}\right)=-i\frac{\pi a^2B_0w}{r}\tag{9}$$

ומכאן אפשר למצוא את I_0 בקלות.

אז מה אנחנו לומדים מהתרגיל הזה?
מצאנו בסה"כ (משוואה 9) כי $A = I_0(1+i\Delta)$ כאשר A תלוי רק בשדה החיצוני המאלץ ובגאומטריה של הבעיה ו־:

$$\Delta \equiv \frac{\pi\mu_0 n a^2 w}{r} \ .$$

הוא פרמטר חסר יחידות כלשהו התלוי שוב רק בשדה המאלץ ובמאפיינים הגיאומטריים של המערכת.
נניח כעת שההשראות הייתה לגמרי לא חשובה ־ כלומר $B(t) = B_E(t)$. במצב זה האיבר השני במשוואה 8 (האיבר הכולל את $\dot{I}$) היה זניח והיינו מקבלים בסה"כ במקום משוואה 9, את אותה משוואה אלא ש־Δ היה 0. במילים אחרות, Δ הוא המדד לעד כמה ניתן להזניח את ההשראות העצמית בבעיה זו ־ כאשר $\Delta \ll 1$ ההשראות העצמית זניחה, אך כאשר $\Delta \gg 1$ היא ששולטת על הדינמיקה.
ננסה להבין טוב יותר מהו Δ.

$$\Delta \equiv \frac{\pi\mu_0 n a^2 w}{r} = \frac{\pi\mu_0 n^2 a^2 b w}{nrb} = \frac{L}{R} w$$

מצאנו אם כן כי R/L היא תדירות אופיינית מסויימת ־ כאשר תדירות השינוי $w \ll R/L$, $\Delta \ll 1$ וניתן להתעלם מההשראות העצמית של המערכת ולהיפך, כאשר $w \gg R/L$ ההשראות העצמית היא החשובה.
נזכר אם כן בשאלה הראשונה שפתרנו היום ובה השתנות השדה הייתה ליניארית בזמן $B = B_0(t/T)$. זמן המחזור של שינוי כזה שואף ל־∞ ולכן התדירות $w \to 0$ וניתן להזניח את ההשראות העצמית.
לאחר שתתנסו קצת בחישובים מספריים תוכלו לקבל סדרי גודל ולהבין מתי השראות עצמית חשובה ומתי לא. ככלל כאשר מדברים על סליל מדברים לרוב על אובייקט בעל השראות עצמית משמעותית בעוד שכאשר מדברים על כריכת זרם בודדת, לרוב מזניחים את ההשראות העצמית שלה.

4.2.2 אופציה ב'

אנחנו מעוניינים לפתור את משוואה 8

$$I(t) = -\frac{\pi a^2}{r}\left(\frac{\partial B_E}{\partial t} + \mu_0 n \frac{\partial I}{\partial t}\right) = -\left(\frac{\pi a^2}{r}\frac{\partial B_E}{\partial t} + \frac{\pi\mu_0 n a^2}{r}\frac{\partial I}{\partial t}\right) \tag{10}$$

נניח כעת כי $B_E(t) = B_0\cos(wt)$. ננחש שאם התדר המאלץ הוא w אז גם התדר של הזרם יהיה כזה, נציב

$$B_E(t) = B_0\cos(wt) \quad , \quad I(t) = I_0\sin(wt-\varphi)$$

ונמצא כי

$$I_0\sin(wt-\varphi) = w\left(\frac{\pi a^2 B_0\sin(wt)}{r} - \frac{\pi\mu_0 n a^2 I_0}{r}\cos(wt-\varphi)\right)$$

ולפיכך:

$$I_0\left(\sin(wt-\varphi) + \frac{\pi\mu_0 n a^2 w}{r}\cos(wt-\varphi)\right) = \frac{\pi a^2 B_0 w}{r}\sin(wt) \tag{11}$$

נציב שני זמנים שונים ונקבל שתי משוואות:

$$\begin{array}{lll} \text{for } wt=0 & I_0\left(-\sin(\varphi) + \frac{\pi\mu_0 n a^2 w}{r}\cos(\varphi)\right) = 0 & \tan(\varphi) = \frac{\pi\mu_0 n a^2 w}{r} \\ \text{for } wt=\varphi & I_0\left(\frac{\pi\mu_0 n a^2 w}{r}\right) = \frac{\pi a^2 B_0 w}{r}\sin(\varphi) & I_0 = \frac{\mu_0 n}{B_0}\sin(\varphi) \end{array}$$

ומכאן אפשר למצוא את I_0, φ.

אז מה אנחנו לומדים מהתרגיל הזה?
מצאנו בסה"כ (משוואה 11) כי $I_0(\sin(wt-\varphi) + \Delta\cos(wt-\varphi)) = A\sin(wt)$ כאשר A תלוי רק בשדה החיצוני המאלץ ובגאומטריה של הבעיה ו־:

$$\Delta \equiv \frac{\pi\mu_0 n a^2 w}{r} = \tan(\varphi) \ .$$

הוא פרמטר חסר יחידות כלשהו התלוי שוב רק בשדה המאלץ ובמאפיינים הגיאומטריים של המערכת.
נניח כעת שההשראות הייתה לגמרי לא חשובה ־ כלומר $B(t) = B_E(t)$. במצב זה האיבר השני במשוואה 10 (האיבר הכולל את $\dot{I}$) היה זניח והיינו מקבלים בסה"כ במקום משוואה 11, את אותה משוואה אלא ש־Δ היה 0. במילים אחרות, Δ הוא המדד לעד כמה ניתן להזניח את ההשראות העצמית בבעיה זו ־ כאשר $\Delta \ll 1$ ההשראות העצמית זניחה, אך כאשר $\Delta \gg 1$ היא ששולטת על הדינמיקה.

ננסה להבין טוב יותר מהו Δ.

$$\Delta \equiv \frac{\pi\mu_0 n a^2 w}{r} = \frac{\pi\mu_0 n^2 a^2 b w}{nrb} = \frac{L}{R}w$$

מצאנו אם כן כי R/L היא תדירות אופיינית מסויימת - כאשר תדירות השינוי $w \ll R/L$, $\Delta \ll 1$ וניתן להתעלם מההשראות העצמית של המערכת ולהיפך, כאשר $w \gg R/L$ ההשראות העצמית היא החשובה.

נזכר אם כן בשאלה הראשונה שפתרנו היום ובה השתנות השדה הייתה ליניארית בזמן $B = B_0(t/T)$. זמן המחזור של שינוי כזה שואף ל-∞ ולכן התדירות $w \to 0$ וניתן להזניח את ההשראות העצמית.

לאחר שתתנסו קצת בחישובים מספריים תוכלו לקבל סדרי גודל ולהבין מתי השראות עצמית חשובה ומתי לא. ככלל כאשר מדברים על סליל מדברים לרוב על אובייקט בעל השראות עצמית משמעותית בעוד שכאשר מדברים על כריכת זרם בודדת, לרוב מזניחים את ההשראות העצמית שלה.

4.2.3 הערה אחרונה בהקשר זה.

על סעיף זה אין צורך לעבור בכיתה בפירוט. עם זאת מומלץ להציג את עיקרי הבעיה המוצגת בסעיף ולהפנות את הסטודנטים המעוניינים בכך אל סיכום התרגול.

חדי העין מבינכם אולי שמו לב כי כאשר חישבנו את w של השאלה הראשונה וטענו כי היא הולכת ל-0 לא השוונו אותה ל-R/L של הטבעת. הסיבה לכך שלא ערכנו את ההשוואה היא כי חישוב L של הטבעת אינו פשוט כלל ועיקר. ככלל, קשה מאד לחשב את ההשראות העצמית של כריכות זרם בודדות, הבעיה היא כי השדה בפנים אינו אחיד ולמרבה הצער (או המזל, תלוי אם פותרים את תרגיל 13 או לא) האינטגרל המתקבל על השטף המגנטי אינו פתיר אפילו במקרה של טבעת מעגלית. למעשה המצב מסובך עוד יותר שכן עבור תיל חד מימדי (דק עד כדי אינסוף) השדה המגנטי מתבדר כמו גם השטף - התוצאה היא כי ההשראות העצמית של תיל דק היא אינסופית והסיבה שזה לא מחולל צרות היא כי אם התיל חד מימדי - גם התנגדותו אינסופית ומסתבר שהאינסוף של R חזק יותר.

ננסה בכל זאת לעשות איזשהו טיפול כמותי על מנת לחשב את ההשראות של כריכה בודדת ברדיוס a וכדי להמנע מאינסופים נניח כי יש לה עובי סופי δ. עם זאת כדי להקל על עצמנו את החישוב נניח $a \lll \delta$ (כדי שהטיפול יהיה נכון יש להניח $\log(a/\delta) \gg 1$ ולכן δ חייב להיות ממש ממש קטן מ-a).

השדה המגנטי במרחק $\delta < x \ll a$ מהתייל הוא בקירוב כשל תיל אינסופי:

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

לפיכך השטף הכולל משפת התיל δ ועד למרחק כלשהו αa כאשר $\delta \ll \alpha a \sim 0.1a$ הוא:

$$\Phi_\alpha = \int_\delta^{\alpha a} dx\ 2\pi(a-x)B(x) \simeq 2\pi a \int_\delta^{\alpha a} dx\ \frac{\mu_0 I}{2\pi x} = \mu_0 I a \log\left(\frac{\alpha a}{\delta}\right)$$

נשים לב כי Φ_α מתבדר לוגריטמית עבור δ קטן, ולכן התרומה של כל החלק הפנימי יותר אינה משמעותית. פורמלית, ניתן לחסום את השדה שם בין $B(\alpha a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha a}$ לבין השדה במרכז כריכה מעגלית הנתון ע"י $B(0) = \frac{\mu_0 I}{2a}$ ולכן בסה"כ כל התרומה של האזור הפנימי לשטף Φ_{in} יכולה להיות חסומה:

$$\frac{(1-\alpha)^2\pi\mu_0 I}{2} = \pi a^2(1-\alpha)^2 B(0) < \Phi_{in} < \pi a^2 (1-\alpha)^2 B(\alpha a) = \frac{(1-\alpha)^2\mu_0 I a}{2\alpha}$$

נשים לב כי Φ_{in} קטן טיפוסית בפקטור לוגריטמי מ-Φ_a ולכן Φ_a יכול להוות הערכה מקורבת לשטף הכולל. יתר על כן:

$$\Phi \cong \Phi_a = \mu_0 I a \log\left(\frac{\alpha a}{\delta}\right) = \mu_0 I a \left[\log\left(\frac{a}{\delta}\right) + \log(\alpha)\right] = \mu_0 I a \log\left(\frac{a}{\delta}\right)\left[1 + \frac{\log(\alpha)}{\log\left(\frac{a}{\delta}\right)}\right] \cong \mu_0 I a \log\left(\frac{a}{\delta}\right)$$

בדרך זו העלמנו את ה-α שאינה גודל פיזיקאלי ע"י שימוש בהנחה ש-$(a/\delta) \gg \alpha^{-1}$. כעת נוכל לחשב את ההשראות העצמית:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\dot{\Phi}}{R} = \mu_0 a \dot{I} \log\left(\frac{a}{\delta}\right)$$

וההשראות העצמית היא:

$$L = \mu_0 a \log\left(\frac{a}{\delta}\right)$$

שימו לב כי L מתבדר לוגריטמית ב-δ קטן בעוד R מתבדר כמו δ^{-2} (שטח החתך) ולכן התדירות הקריטית R/L מתבדרת לאינסוף עבור תיל דק - כלומר עבור תיל דק $\Delta \to 0$ וההשראות העצמית תמיד זניחה.