פיסיקה תרמית - תרגול 1

אדמיניסטרציה חובת הגשת תרגילים: 80%.
תרגיל שלא הוגש נחשב ציון 0. ציון התרגילים הסופי מחושב מתוך 80% התרגילים הטובים כך שכדאי להגיש הכל. ציון התרגילים נחשב ל- 20% מהציון הסופי בקורס (לא מגן).

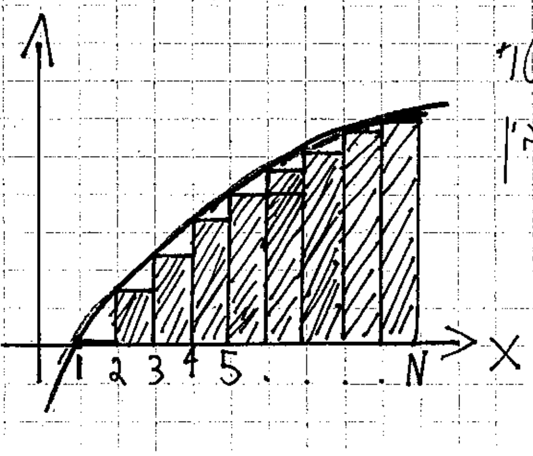
אתר הקורס: moodle.huji.ac.il/hu13

נושאים: ① קירוב סטירלינג
② הסתברות במערכות בדידות
③ הסתברות במערכות רציפות
④ גבול הרצף

① קירוב סטירלינג

כפי שנראה בהמשך, אנו נעסוק הרבה בספירת מצבים, ובאופן טבעי ניתקל בביטויים כמו $\ln(N!)$.
אנו נעבוד במערכות עם מספר חלקיקים גדול מאוד, ונראה שבמקרה זה ניתן להזניח את האופי הבדיד של החלקיקים הבודדים ולעבוד בגבול הרצף.
למרות זאת, קשה להתייחס לביטוי כמו $\boxed{\ln(N!)}$ כאל פונקציה רציפה, למשל כדי לגזור או לבצע אינטגרציה, ולכן ננסה למצוא ביטוי אנליטי, רציף, המקרב את $\ln(N!)$.
נשחק קצת עם הביטוי:

$$\boxed{\ln(N!)=}\ \ln(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot N)=\ln(1)+\ln(2)+\ldots+\ln(N)\ \boxed{=\sum_{j=1}^{N}\ln(j)}$$



המשמעות הגיאומטרית של ביטוי כזה היא בדיוק השטח המצויר בין הנקודות $(1,\ldots,N)$ ולכן הוא בקירוב טוב האינטגרל על $\ln(x)$ בין $x=1$ ל- $x=N$.

שימו לב: קירוב זה מדויק ~~רק~~ כאשר $N \gg 1$, כי לא קיים
$N \sim 1$ הביטוי הבדיק שונה מהאינטגרל הרציף.

$$\ln(N!) \approx \int_1^N \ln(x)dx = x\ln x - x\Big|_1^N = N\ln N - N + 1 \approx N\ln N - N\ln(e)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(N!) \approx N\ln\left(\frac{N}{e}\right)}, \quad \boxed{N! \approx e^{N\ln N - N} = N^N e^{-N}}$$

עם ביטויים כאלה אפשר כבר לעבוד בצורה אנליטית.
למעשה, הכללה של $N!$ לפונקציה אנליטית על כל המישור המרוכב (פרט למספרים שליליים שלמים) היא פונקציית Γ, ומומלץ לקרוא על זה בויקיפדיה.

② הסתברות במערכות בדידות

הגדרה: מרחב המדגם הוא קבוצת כל התוצאות האפשריות של ניסוי (כל המצבים האפשריים).

לדוגמא: נתונים 2 מטבעות ומטילים אותם בזה אחר זה. $\uparrow$ מסמל עץ, $\downarrow$ מסמל פלי.

מרחב המדגם של הניסוי: $\Omega = \{(\uparrow,\uparrow), (\uparrow,\downarrow), (\downarrow,\uparrow), (\downarrow,\downarrow)\}$

הגדרה: הסתברות של איבר $A \in \Omega$ (איזשהו מצב אפשרי בניסוי) מסומנת $P(A)$ ומקיימת את התכונות:
$0 \le P(A) \le 1$, $\sum_{A\in\Omega} P(A) = 1$, $\boxed{A \cap B = \phi \Rightarrow P(A\cup B) = P(A) + P(B)}$

דוגמא: נתונים 10 מטבעות ומטילים אותם בזה אחר זה.
כמה תוצאות שונות יש?
מאחר שלכל מטבע יש 2 אפשרויות, יש סה"כ 2^{10} קומבינציות שונות.
מה הסיכוי שייצא, למשל, $(\uparrow,\uparrow,\downarrow,\uparrow,\downarrow,\downarrow,\uparrow,\downarrow,\downarrow,\downarrow)$?
לכל המצבים הסתברות שווה, אז הסיכוי הוא בדיוק $\frac{1}{2^{10}}$.

נסמן את מספר ה-↑ ב- $N_\uparrow$ ואת מספר ה-↓ ב- $N_\downarrow$
ונגדיר משתנה $S = N_\uparrow - N_\downarrow$. זהו משתנה <u>מקרי</u>
המתייחס לאותו ניסוי, אבל עם מרחב מדגם שונה:

$$\Omega_S = \{-10, -8, -6, \dots, 6, 8, 10\}$$

מה הסיכוי שבניסוי הנ"ל נקבל $S=8$?
יש, כאמור, 2^{10} מצבים שונים, אך נבדוק כמה מהם $S=8$?
למצב עם $S=8$ מתקיים: $S \equiv N_\uparrow - N_\downarrow = 8$

סה"כ מטבעות $\equiv N_\uparrow + N_\downarrow = 10$

$$\Downarrow$$

$N_\uparrow = 9,\ N_\downarrow = 1 \Longrightarrow$ כל המצבים עם בדיוק פלי אחד מתוך 10 המטבעות מקיימים $S=8$

$$\Downarrow$$

יש בדיוק 10 מצבים (שונים) כאלה, ולכן
כי לכל המצבים הסתברות שווה.

$$\boxed{P(S=8) = \frac{10}{2^{10}}}$$

זה היה קל, אך מהו $P(S=6)$?

$$\left.\begin{array}{l} N_\uparrow - N_\downarrow = 6 \\ N_\uparrow + N_\downarrow = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} N_\uparrow = 8 \\ N_\downarrow = 2 \end{array}}$$

כמה מצבים יש עם בדיוק 2 מטבעות מתוך 10 שנתנו פלי?
עלינו לבחור 2 זריקות מתוך 10 הזריקות שלנו, שבשתיהן קיבלנו פלי. מסמנים את זה: $\binom{10}{2}$
ניתן להראות שמספר הדרכים לבחור k עצמים שונים מתוך סה"כ n מצבים הוא: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

לכן:

$$\boxed{P(S=6)} = \frac{\binom{10}{2}}{2^{10}} = \frac{\frac{10!}{2!\,8!}}{2^{10}} = \boxed{\frac{45}{2^{10}}}$$

הערה: איברים מהצורה $\binom{n}{k}$ מופיעים בצורה טבעית בבינום של ניוטון

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ זה מספר הדרכים לבחור k עצמים מתוך n. בפתיחת הסוגריים, כל ביטוי מהצורה של a מופיע מספר פעמים, ומקדם זה שומר לנו כמה פעמים האיבר יופיע בסכום.

חישוב ממוצע:

נזרוק קובייה תקנית ונשאל מה התוצאה בממוצע:

מרחב המדגם: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ והסיכוי לכל אחת מהתוצאות הוא בדיוק $\frac{1}{6}$.

הממוצע מסומן בסוגריים משולשים $\langle\ \rangle$ והוא מחושב:

$$\langle n\rangle=\sum_{n\in\Omega}n\cdot P(n)=\sum_{n=1}^{6}n\cdot\frac{1}{6}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$$

כלומר אם נזרוק קובייה המון פעמים ונחשב את התוצאה הממוצעת, נקבל 3.5

תרגיל: בדוגמאות עם 10 המטבעות, מהו הממוצע של S?

פתרון: נחשב את ההסתברות שיצא S:

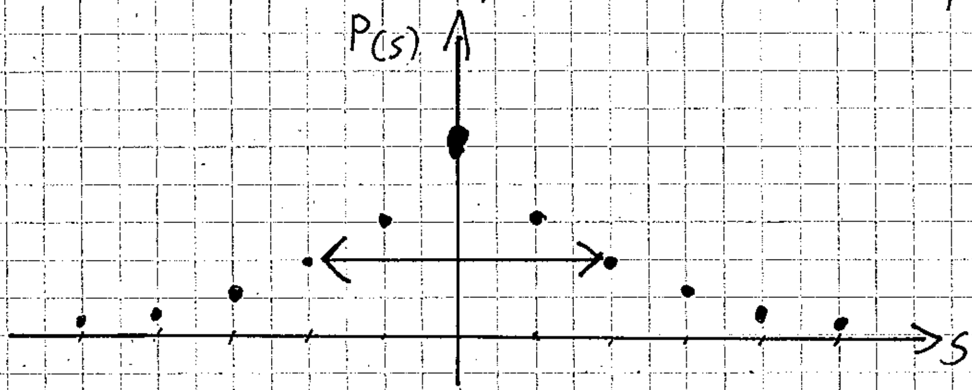
$$\left.\begin{aligned}S&=N_\uparrow-N_\downarrow\\10&=N_\uparrow+N_\downarrow\end{aligned}\right\}\Rightarrow N_\uparrow=\frac{1}{2}(10+S)$$

$$\boxed{P(S)}=\frac{1}{2^{10}}\binom{10}{N_\uparrow}=\frac{1}{2^{10}}\binom{10}{\frac{10+S}{2}}=\boxed{\frac{1}{2^{10}}\frac{10!}{\left(\frac{10+S}{2}\right)!\left(\frac{10-S}{2}\right)!}}$$

$$\langle S\rangle=\sum_{S\in\Omega}S\cdot P(S)=\sum_{\substack{S=-10\\(\text{זוגי } S)}}^{10}\frac{10!}{2^{10}}\cdot\frac{S}{\left(\frac{10+S}{2}\right)!\left(\frac{10-S}{2}\right)!}=0$$

מכנה זוגי ב-S, מונה אי-זוגי ב-S $\Leftarrow$ סכום על קטע סימטרי סביב $S=0$ נותן 0.

__סטיית תקן__ נוכל לצייר את $P(s)$ מהדוגמא האחרונה ולקבל גרף שדומה לפונקציה ע' הסתברות גבוהה יותר.



סטיית התקן היא מדד לרוחב של הגרף הנ"ל. כלומר, זה מודד את מידת הפיזור של התוצאות. ייתכן מקרה שבו רוחב הגרף צר מאוד ורוב התוצאות קרובות מאוד לממוצע. לחילופין, ייתכן מצב שבו רוחב הגרף גדול, ולכן התוצאות אינן מפוזרות או קרובות לממוצע.

הדרך לחשב את סטיית התקן היא למצוא את המרחק מהממוצע, בצורה הבאה:

(סימון של סטיית תקן: σ או (Δx))

$$\boxed{\sigma^2 \equiv (\Delta x)^2 \equiv \langle (x-\langle x\rangle)^2 \rangle}$$

(שימו לב ש: $\langle x-\langle x\rangle \rangle = 0$ ולכן יש צורך בריבוע.)

נוסחה נוחה יותר לשימוש, שתוכיחו בתרגיל בית, היא:

$$\boxed{\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

③ הסתברות במערכות רציפות

לעיתים קרובות אנו נתקלים בטבע במערכות המתוארות ע"י פרמטר רציף, ואז ניתוח הסתברותי כפי שהצגנו מקודם אינו אפשרי.

נרצה להכליל את הכלים שראינו למעלה גם עבור מקרים רציפים.

לדוגמא: המשתנה המקרי הוא הזמן בין שתי התפרקויות של אטומים רדיואקטיביים בגוש חומר המכיל N_0 אטומים בזמן $t=0$. זהו משתנה מקרי רציף.

במקרה כזה, במקום לעבוד עם פונקציית הסתברות, עובדים עם פונקציית "צפיפות הסתברות".

שאלה כמו "מה הסיכוי שאטום יתפרק כעבור $\Delta t = 8_{sec}$?" אינה רלוונטית, שכן הסיכוי שזה יקרה לאחר בדיוק 8_{sec} הוא אפס!

לעומת זאת, שאלה כמו "מה הסיכוי שאטום יתפרק מתישהו בטווח $8_{sec} \le \Delta t \le 10_{sec}$?" היא רלוונטית לחלוטין.

פונקציית צפיפות ההסתברות מוגדרת כך ש:

$P(t)dt$ הוא הסיכוי לקבל תוצאה בתחום $(t, t+dt)$ כאשר $dt \ll t$.

חייב להתקיים $0 \le P(t) \le 1$ וגם $\int_{t\in\Omega} P(t)dt = 1$

מהו הסיכוי שמאורע יתרחש בין (t_1, t_2)?

זה פשוט: $\boxed{\int_{t_1}^{t_2} P(t)dt}$, שהווה את גבול הרצף של הביטוי: $\sum_i P(t_i) = \sum_i P(t_i)dt$

מהו הממוצע: בדומה למקרה הבדיד:

$$\boxed{\sum_{x\in\Omega} x\cdot P(x) \Rightarrow \int_{t\in\Omega} t\cdot P(t)dt}$$

סטיית התקן: $\sigma^2=(\Delta X)^2=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2=\boxed{\sum x^2P(x)-\left(\sum xP(x)\right)^2}$

$$\Downarrow$$

$$(\Delta t)^2=\langle t^2\rangle-\langle t\rangle^2=\int t^2P(t)dt-\left(\int tP(t)dt\right)^2$$

דוגמא: נתון חומר רדיואקטיבי, והסיכוי להתפרקות רדיואקטיבית במרווח זמן $(t,\ t+dt)$ הוא:

$$\boxed{P(t)dt=\lambda e^{-\lambda t}dt}$$

מהו הממוצע הזמן בין שתי התפרקויות?
מה סטיית התקן?

⇐ תחילה נבדוק שצפיפות ההסתברות הנתונה אכן מנורמלת כמו שצריך: מרחב המדגם הוא $0\leq t<\infty$
(התפרקות ראשונה ב- $t_0=0$, והתפרקות שנייה בזמן t)

כנדרש! $\int_0^\infty P(t)dt=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}dt=\int_0^\infty e^{-y}dy=1$

חישוב הממוצע: $\langle t\rangle=\int_0^\infty tP(t)dt=\int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty ye^{-y}dy$

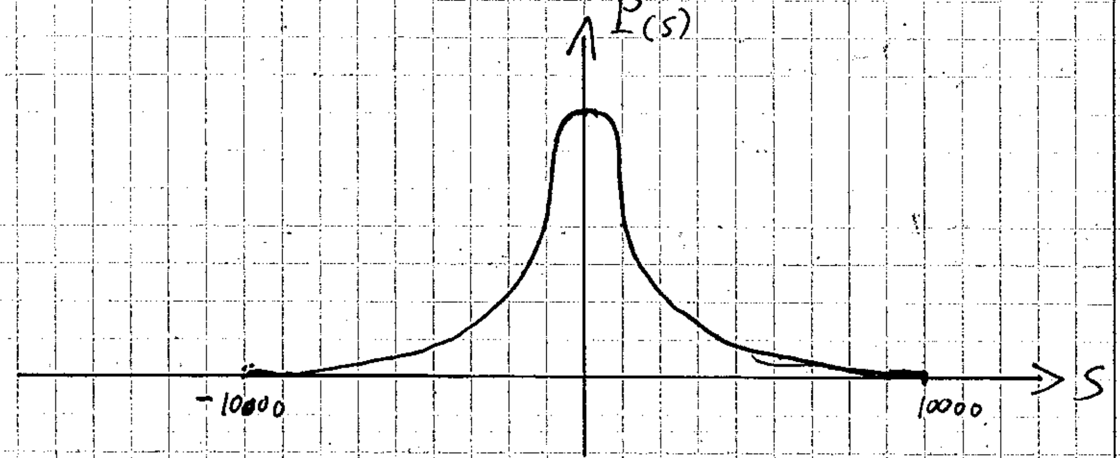
$$\Rightarrow \boxed{\langle t\rangle=\frac{1}{\lambda}}$$

סטיית תקן: $\boxed{(\Delta t)^2=}\langle t^2\rangle-\langle t\rangle^2=\int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}dt-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$

$$=\frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty y^2e^{-y}dy-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\boxed{\frac{1}{\lambda^2}}$$

(4) גבול הרצף

נחזור לדוגמא בו זרקנו 10 מטבעות, אבל במקום 10 מטבעות, ניקח $10^4=10{,}000$ מטבעות. אם נצייר כעת את $P(s)$, נקבל גרף שמרוב נקודות ייראה לנו רציף



מתוך הגרף הנ"ל ניתן להגדיר למעשה צפיפות הסתברות $P(s)$ כי המשתנה הוא לכל צורך מעשי רציף (כלומר $\frac{\Delta N}{N} = \frac{2}{20000} \ll 1$) נגדיר: $P(s)ds = \frac{\Delta P}{\Delta S} \cdot \Delta S$

בהמשך נעבוד עם מערכות מרובות חלקיקים ונתייחס להתפלגויות שלנו כרציפות מבלי להתעכב על ההסבר של גבול הרצף.