תרגול 4 - פוטנציאל חשמלי ומשוואת לפלס

1 תזכורת

במהלך השבוע האחרון ראיתם כי כל עוד אנו דנים במקרים אלקטרוסטטיים, השדה החשמלי הוא שדה משמר. לפיכך ניתן לכתוב אותו כגרדיאנט של פונקציה סקלרית $\phi(\vec{r})$ כלשהי אותה אנו מכנים הפוטנציאל החשמלי:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x}\bigg|_{\vec{r}} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y}\bigg|_{\vec{r}} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}\bigg|_{\vec{r}}\right) \tag{1}$$

הפוטנציאל של מטען נקודתי המצוי בראשית נתון ע"י $\phi(r) = \frac{KQ}{r}$ ומכאן נסיק כי הפוטנציאל של מערכת מטענים נתון ע"י

$$\phi(\vec{r}) = \sum_i \frac{KQ_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \tag{2}$$

או בגבול הרצף:

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}' \; \frac{K\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \; . \tag{3}$$

נזכור כי באופן כללי $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ כאשר U היא האנרגיה הפוטנציאלית וכיוון ש־$\vec{F} = q\vec{E}$, נוכל להסיק כי:

$$-\vec{\nabla}U = \vec{F} = q\vec{E} = -q\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \phi(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{q}$$

נסדר אם כן את המושגים בהם נתקלתם:

	Global	Per unit mass
Scalar function	U	ϕ
Vector function	$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$	$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$

אם נזכר במה בחוק גאוס הדיפרנציאלי $\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi K\rho$ ונציב בו $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ נסיק כי:

$$\vec{\nabla}^2\phi = -4\pi K\rho$$

כאשר האופרטור $\vec{\nabla}^2$ קרוי לאפלסיאן. במקרה הספציפי בו $\rho = 0$ (אין מטענים) נקבל:

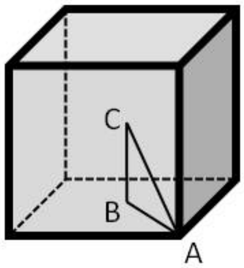
$$\vec{\nabla}^2\phi = 0 \tag{4}$$

משוואה זו קרוייה משוואת לפלס.

2 מטענים בקודקודי קובייה

נתחיל בשאלה פשוטה.
שמונה מטענים נמצאים בקודקודיה של קוביה שאורך צלעה L.
א. מהו השדה החשמלי במרכז הקוביה.
ב. מהו הפוטנציאל החשמלי במרכז הקוביה.

משיקולים של סימטריה קל מאד להבין כי השדה החשמלי מתאפס, לכן נעבור ישר לחישוב הפוטנציאל. נשים לב כי הפוטנציאל שמשרים שמונת המטענים על הנקודה שבמרכז זהה ולכן נסתפק בחישוב הפוטנציאל שמשרה אחד מהמטענים, ואז פשוט נכפיל ב־8. החלק המסובך בשאלה הוא אם כן חישוב המרחק. נביט בציור, המרחק אותו אנו מנסים למצוא



הוא המרחק AC. קל להבין כי $AB = L/\sqrt{2}$ ומאחר ו-$BC = L/2$ נמצא בסה"כ כי

$$AC = \left(AB^2 + BC^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{L^2}{2} + \frac{L^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}L$$

לפיכך, הפוטנציאל שמשרה מטען יחיד הוא $\phi_1 = \frac{2KQ}{\sqrt{3}L}$ והפוטנציאל הכולל שמשרים שמונת המטענים הוא:

$$\phi = 8\phi_1 = \frac{16KQ}{\sqrt{3}L} \tag{5}$$

3 חישוב שדה קוודרופול

נתונה הקונפיגורציה הבאה: שני מטענים בעלי גודל Q ממוקמים לאורך ציר ה-$\hat{z}$ בנקודות $\pm L$. מטען נוסף $-2Q$ ממוקם בינהם.

א. מצא את הפוטנציאל $\phi(\vec{r})$ במרחקים גדולים מהמערכת.

ב. מצא את השדה החשמלי $\vec{E}(\vec{r})$ במרחקים גדולים מהמערכת.

3.1 הפוטנציאל $\phi(\vec{r})$

נגדיר מערכת קורדינטות כדוריות. נשים לב כי המערכת סימטרית לשינוי הזווית φ ולכן $\phi(r,\theta)$ (כאשר r הינו המרחק מהמטען $-2Q$).

תחת סימון זה, המרחק מכל אחד ממטעני ה-Q הינו:

$$r_\pm = \left[(r\cos\theta + L)^2 + r^2\sin^2\theta\right]^{1/2} = \left[r^2 \pm 2rL\cos\theta + L^2\right]^{1/2}$$

ותחת ההגדרה $\delta \equiv \frac{L}{r} \ll 1$ נסיק:

$$r_\pm = r\left[1 \pm 2\delta\cos\theta + \delta^2\right]^{1/2}$$

וכך:

$$\phi = \frac{KQ}{r_+} + \frac{KQ}{r_-} - \frac{2KQ}{r} = \frac{KQ}{r}\left[\frac{1}{(1+2\delta\cos\theta+\delta^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1-2\delta\cos\theta+\delta^2)^{1/2}} - 2\right]$$

נזכר כי $(1+x)^{-1/2} \cong 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$ וכך:

$$\phi = \frac{KQ}{r}\left[\left(1 - \frac{1}{2}(2\delta\cos\theta+\delta^2) + \frac{3}{8}(2\delta\cos\theta+\delta^2)^2\right) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \left(1 - \frac{1}{2}(-2\delta\cos\theta+\delta^2) + \frac{3}{8}(-2\delta\cos\theta+\delta^2)^2\right) - 2\right]$$

ומכיוון שאנו שומרים רק על איברים מסדר שני:

$$\phi = \frac{KQ}{r}\left[\left(1 - \delta\cos\theta - \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{3}{2}\delta^2\cos^2\theta\right)\left(1 + \delta\cos\theta - \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{3}{2}\delta^2\cos^2\theta\right) - 2\right]$$

ובסה"כ

$$\phi(r,\theta) = \frac{KQ\delta^2}{r}\left(3\cos^2\theta - 1\right) = \frac{KQL^2}{r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \tag{6}$$

3.2 השדה $\vec{E}(\vec{r})$

מצאנו כי

$$\phi(r,\theta)=\frac{KQL^2}{r^3}\left(3\cos^2\theta-1\right)$$

כעת נוכל למצוא את השדה ע"י גזירת הפוטנציאל. נשים לב כי הקורדינטות כאן הן כדוריות ולכן:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi=-\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta}\right)=...$$

$$...=-KQL^2\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{3\cos^2\theta-1}{r^3}\right)\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{3\cos^2\theta-1}{r^3}\right)\hat{\theta}\right]=...$$

$$...=-KQL^2\left[\left(\frac{(-3)(3\cos^2\theta-1)}{r^4}\right)\hat{r}+\left(\frac{6\cos\theta(-\sin\theta)}{r^4}\right)\hat{\theta}\right]=...$$

$$...=\frac{3KQL^2}{r^4}\left[\left(3\cos^2\theta-1\right)\hat{r}+(2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta}\right]$$

ונסכם:

$$\vec{E}=\frac{3KQL^2}{r^4}\left[\left(3\cos^2\theta-1\right)\hat{r}+\sin(2\theta)\hat{\theta}\right] \tag{7}$$

נשים לב כי עבור מטען q במרחק r בזווית $\theta=0$ נקבל

$$\vec{F}=q\vec{E}=\frac{6KQL^2}{r^4}\hat{r}$$

כפי שראינו באחת מהשאלות הסגורות בתרגיל 1.

4 חישובי פוטנציאל

נתונה התפלגות המטען הבאה (סימטריה כדורית):

$$\rho(r)=\begin{cases}\rho_0 & \text{for} \quad a<r<b\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

כמו כן ידוע כי ב־a וב־b ישנם משטחים בעלי צפיפות מטען σ. מצא את השדה החשמלי ואת הפוטנציאל בכל המרחב.

4.1 שדה

את השדה בכל אחד מהתחומים נמצא על פי חוק גאוס האינטגרלי: $\int\vec{E}d\vec{S}=4\pi KQ_{in}$ וכיוון שהסימטריה כדורית נבחר מעטפות גאוס כדוריות ונסיק:

$$r^2E=KQ_{in}$$

עבור $r<a$ המטען הוא 0 ולכן

$$E(r<a)=0$$

ב־$r=a$ ישנה קליפה ולכן המטען שבמעטפת קופץ בבת אחת ל־$4\pi a^2\sigma$. עבור $a<r<b$ ישנו גם נפח $\frac{4\pi}{3}(r^3-a^3)$ הטעון בצפיפות נפחית ρ_0. כך נסיק מחוק גאוס האינטגרלי:

$$E(a<r<b)=\frac{K}{r^2}\cdot\left[4\pi a^2\sigma+\frac{4\pi}{3}(r^3-a^3)\rho_0\right]$$

ב־$r=b$ נוספת קליפה טעונה נוספת שמטענה הכולל $4\pi b^2\sigma$ ומכאן ואילך לא יתווספו עוד מטענים ונסיק:

$$E(b<r)=\frac{K}{r^2}\cdot\left[4\pi\sigma(a^2+b^2)+\frac{4\pi}{3}(b^3-a^3)\rho_0\right]$$

ונסכם:

$$E(r)=\begin{cases}0 & \text{for} \quad r<a\\ \frac{4\pi K}{r^2}\left[a^2\sigma+\frac{(r^3-a^3)\rho_0}{3}\right] & \text{for} \quad a<r<b\\ \frac{4\pi K}{r^2}\left[\sigma(a^2+b^2)+\frac{(b^3-a^3)\rho_0}{3}\right] & \text{for} \quad b<r\end{cases} \tag{8}$$

4.2 פוטנציאל

נזכור כי $E = -\vec{\nabla}\phi$ וכך נוכל למצוא כי $\phi(r) = -\int_0^r dr' E(r')$. נשים לב כי באינטגרל כזה למצוא את $\phi(r > b)$ נצטרך שלושה תחומים. בפועל ייתכן שיהיה לנו קל יותר לעשות דבר אחר.

אנחנו יודעים כי הפוטנציאל הוא אינטגרל של פונקציה חסומה (השדה) ולכן הוא עובר בצורה רציפה. לכן נוכל לעשות את האינטגרל בכל תחום רק עליו, נוסיף קבוע ובסוף נסדר את הקבועים כך שהפוטנציאל יהיה רציף ויתאפס באינסוף. נראה איך זה עובד:

בתחום $r > b$ מתקיים: $E(r) = A/r^2$ כאשר $A \equiv 4\pi K\left[\sigma(a^2+b^2) + \frac{(b^3-a^3)\rho_0}{3}\right]$. לכן $\phi = A/r + C_1$ ואת הקבוע C_1 ניקח להיות 0 כדי שהפוטנציאל יתאפס באינסוף. נציב את A ונסכם:

$$\phi(r) = \frac{4\pi K}{r}\left[\sigma(a^2+b^2) + \frac{(b^3-a^3)\rho_0}{3}\right]$$

בתחום $a < r < b$ מתקיים

$$E(a<r<b) = 4\pi K \cdot \left[\frac{3a^2\sigma - a^3\rho_0}{3r^2} + \frac{\rho_0 \cdot r}{3}\right]$$

לכן לאחר אינטגרציה נמצא:

$$\phi(a<r<b) = 4\pi K \cdot \left[\frac{3a^2\sigma - a^3\rho_0}{3r} - \frac{\rho_0 \cdot r^2}{6}\right] + C_2$$

את C_2 נמצא על ידי הדרישה כי הפוטנציאל יעבור רציף ב־$r = b$ כלומר:

$$4\pi K \cdot \left[\frac{3a^2\sigma - a^3\rho_0}{3b} - \frac{\rho_0 \cdot b^2}{6}\right] + C_2 = \frac{4\pi K}{b}\left[\sigma(a^2+b^2) + \frac{(b^3-a^3)\rho_0}{3}\right]$$

וכך נוכל לחלץ את C_2. כך נוכל להמשיך ולמצוא גם את הפוטנציאל באיזור $r < a$ כאשר בכל פעם, קבוע האינטגרציה נקבע מרציפות הפוטנציאל.

5 שאלה למחשבה במהלך ההפסקה

נניח כדור טעון בצפיפות $\rho > 0$. קודחים בכדור תעלה דקה שעוברת דרך הכדור ומגיעה לצד השני. בשפת הכדור עוזבים מטען $q < 0$ ־ מהאינטואיציה מובן לנו כי הכדור ייפול פנימה (מי שהדבר אינו ברור לו, יכול לחשוב על מקבילה גרוויטציונית).

ננסה לראות זאת משהמשוואות: אם נבנה מעטפת ברדיוס $r < R$ המטען הכלוא בה הוא $Q(r) = \frac{4\pi}{3}\rho r^3$, לכן נוכל לחשב את הפוטנציאל בכל נקודה:

$$\phi(r) = \frac{KQ(r)}{r} = \frac{4\pi K\rho}{3} r^2$$

נשווה את הפוטנציאל על שפת הכדור ובמרכזו ונמצא כי:

$$\phi(r=R) = \frac{4\pi K\rho}{3} R^2 > 0 = \frac{4\pi K\rho}{3} 0^2 = \phi(r=0)$$

כלומר מצאנו כי הפוטנציאל על השפה גבוה מהפוטנציאל במרכז הכדור. מטען שלילי נע מפוטנציאל נמוך לגבוה ולפיכך לא ייתכן שהמטען q ינוע מהשפה אל מרכז הכדור וזאת בסתירה לאינטואיציה שהפעלנו קודם.

איפה טעינו?

5.1 שאלה פשוטה

נניח שתי קליפות כדוריות קואוצנטריות. מטען כל קליפה Q_i ורדיוסה R_i כאשר $R_1 < R_2$ ־ המטען של כל קליפה מצוי רק על השפה שלה. נמצא את השדה בכל מקום:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad r < R_1 \\ \frac{KQ_1}{r^2}\hat{r} & \text{for} \quad R_1 < r < R_2 \\ \frac{K(Q_1+Q_2)}{r^2}\hat{r} & \text{for} \quad R_2 < r \end{cases}$$

מאחר ו־$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r}$ נסיק $\phi(r) = -\int_{r_0}^{r} dr'\ E_r(r')$ וכך:

$$\phi(r) = \begin{cases} 0 + C_0 & \text{for} \quad r < R_1 \\ \frac{KQ_1}{r} + C_1 & \text{for} \quad R_1 < r < R_2 \\ \frac{K(Q_1+Q_2)}{r} + C_2 & \text{for} \quad R_2 < r \end{cases}$$

כאשר C_i השונים הם קבועי אינטגרציה. את הקבועים הללו נקבע על פי דרישות רציפות. בנוסף נרצה שבאינסוף הפוטנציאל ילך ל־0 ולכן נגדיר $C_2 = 0$. בסה"כ נסיק:

$$\left(\frac{KQ_1}{r} + C_1\right|_{r=R_2} = \left(\frac{K(Q_1+Q_2)}{r}\right|_{r=R_2} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{KQ_2}{R_2}$$

$$(0 + C_0|_{r=R_1} = \left(\frac{KQ_1}{r} + C_1\right|_{r=R_1} \quad \Rightarrow \quad C_0 = \frac{KQ_1}{R_1} + C_1 = \frac{KQ_1}{R_1} + \frac{KQ_2}{R_2}$$

ובסה"כ:

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{KQ_1}{R_1} + \frac{KQ_2}{R_2} & \text{for} \quad r < R_1 \\ \frac{KQ_1}{r} + \frac{KQ_2}{R_2} & \text{for} \quad R_1 < r < R_2 \\ \frac{K(Q_1+Q_2)}{r} & \text{for} \quad R_2 < r \end{cases} \tag{9}$$

משמעות: את הפוטנציאל ניתן תמיד לכייל ולהוסיף לו קבוע ־ מאחר והפיזיקה נקבעת ע"פ גרדיאנט הפוטנציאל הקבוע לא ישנה. בהתאם הכלל $\phi = KQ/r$ נכון עד כדי קבוע! הקבוע הזה קבוע כל זמן שלא נוספת עוד קליפת מסה, כאשר נוספת קליפה, משתנה הקבוע כפי שראינו בדוגמה זו.

5.2 תשובה לשאלת ההפסקה

כפי שניתן להבין מהשאלה הקודמת קליפות מסה משנות את הקבוע המכייל את הפוטנציאל. לכן, גם אם בקצה הכדור הטעון אנחנו דורשים $\phi = KQ/r$ ומשמעות הדבר כי הקבוע הנוסף לפוטנציאל הוא 0, אין זה אומר שבתוך הכדור הפוטנציאל בהכרח מתאפס (שהרי אנחנו לוקחים עוד ועוד קליפות מסה). בבית תמצאו את הפוטנציאל במקרה זה ישירות ע"י אינטגרציה של השדה.

6 אטום מרובה אלקטרונים

נסתכל על אלקטרון באטום ניטרלי מרובה אלקטרונים. במודל לבעיה הזו, המכונה קירוב Hartree־Fock, מתיחסים לאלקטרון כאילו הוא נע בפוטנציאל החשמלי הבא:

$$\phi_{HF}(r) = \frac{Kq}{r}\left[1 + (z-1)e^{-r/a}\right]$$

כאשר r הוא המרחק מהגרעין, z הוא מספר הפרוטונים בגרעין, a מרחק אופייני באטום ו־q הוא מטען האלקטרון בסימן $+$ (לא סימנו ב־e כדי להמנע מבלבול על אקספוננט). מצא את:

א. דון ב־$\phi(r)$ בגבולות השונים והסבר את משמעות הפוטנציאל.

ב. השדה החשמלי שפועל על האלקטרון.

ג. צפיפות המטען באטום (בהתעלם מהאלקטרון המדובר).

ד. מהו המטען הכולל במרחב וכמה מרוכז בראשית.

6.1 אינטואיציה

ניתן לומר כמה מילים על הפוטנציאל הזה. לצורך כך, נביט בו בגבולות.

בגבול $r \gg a$ נקבל:

$$\phi(r) = \frac{Kq}{r}\left[1 + (z-1)e^{-r/a}\right] \cong \frac{Kq}{r}$$

כלומר האלקטרון מרגיש מטען של q ־ כל האלקטרונים האחרים ממסכים את הפוטנציאל שמשרה הגרעין.

בגבול $r \ll a$ נקבל:

$$\phi(r) = \frac{Kq}{r}\left[1+(z-1)e^{-r/a}\right] \cong \frac{zKq}{r}$$

כלומר האלקטרון מרגיש מטען של zq - היות ובינו לבין הגרעין אין אף אלקטרון שימסך את הפוטנציאל שמשרה הגרעין.

6.2 השדה החשמלי

כזכור השדה החשמלי במרחב נתון ע"י $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$. כיוון שבמקרה שלנו ϕ הוא פונקציה של r בלבד, $E = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r}$ כלומר:

$$E = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} = -\left\{-\frac{Kq}{r^2}\left[1+(z-1)e^{-r/a}\right] + \frac{Kq}{r}\left[\frac{(z-1)}{-a}e^{-r/a}\right]\right\}$$

ונסכם:

$$E = \frac{Kq}{r^2}\left[1+(z-1)\left(1+\frac{r}{a}\right)e^{-r/a}\right]\hat{r} \tag{10}$$

6.3 צפיפות המטען

את צפיפות המטען נמצא על סמך $\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi K\rho$ ולכן

$$\rho = \frac{\vec{\nabla}\vec{E}}{4\pi K} = \frac{1}{4\pi K r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) = \frac{1}{4\pi K r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(Kq\left[1+(z-1)\left(1+\frac{r}{a}\right)e^{-r/a}\right]\right) = \ldots$$

$$\ldots = \frac{(z-1)q}{4\pi r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(1+\frac{r}{a}\right)e^{-r/a}\right] = \frac{(z-1)q}{4\pi r^2}\left[\frac{e^{-r/a}}{a} - \frac{1}{a}\left(1+\frac{r}{a}\right)e^{-r/a}\right] = -\frac{(z-1)q}{4\pi r^2}\cdot\frac{r}{a^2}e^{-r/a}$$

ונסכם:

$$\rho(r) = -\frac{(z-1)q}{4\pi a^2 r}\cdot e^{-r/a} \tag{11}$$

6.4 המטען הכולל

נתחיל בחישוב המטען הכולל במעטפת בכל מקום למעט $r \equiv 0$:

$$Q_{env} = \int_0^\infty dr\ 4\pi r^2\rho(r) = -\int_0^\infty dr\ 4\pi r^2\cdot\frac{(z-1)q}{4\pi a^2 r}\cdot e^{-r/a} = -\frac{(z-1)q}{a^2}\int_0^\infty dr\ re^{-r/a}\ldots$$

$$\ldots = -\frac{(z-1)q}{a^2}\left[r\cdot\left(-ae^{-r/a}\right) + a\int_0^\infty dr\ e^{-r/a}\right] = -\frac{(z-1)q}{a^2}\left[a\int_0^\infty dr\ e^{-r/a}\right] = -(z-1)q$$

מצד שני, אנחנו יודעים כי האטום נייטרלי ולכן סכום המטענים של המעטפת, הגרעין והאלקטרון הוא 0 כלומר:

$$0 = Q_{env} + Q_{nuc} + (-q_e) \quad \Rightarrow \quad Q_{nuc} = zq$$

ונסכם:

$$Q_{env} = -(z-1)q \quad , \qquad Q_{nuc} = zq \tag{12}$$

7 שימוש במשוואת לפלס

נתון כדור טעון ברדיוס R. הפוטנציאל בתוך הכדור נתון ע"י:

$$\phi(r,\theta) = \phi_0\left(\frac{r}{R}\right)^3\cos(\theta) \tag{13}$$

א. מצא את צפיפות המטען בכדור.

ב. נתון כי מחוץ לכדור אין מטענים נוספים וכי $\phi(r \gg R) \propto r^{-\alpha}$ - מהו α.

7.1 צפיפות המטען

צפיפות המטען בכל מקום נתונה ע"י משוואת לפלס:

$$\rho(\vec{r}) = -\frac{\vec{\nabla}^2\phi}{4\pi K}$$

לכן:

$$\rho(\vec{r}) = -\frac{\vec{\nabla}^2\phi}{4\pi K} - \frac{\phi_0 R^{-3}}{4\pi K}\cdot\vec{\nabla}^2\left(r^3\cos(\theta)\right)$$

נשתמש בכך ש־:

$$\vec{\nabla}^2 F = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) +$$

וכן נקל על עצמנו ונסמן $A = \frac{\phi_0 R^{-3}}{4\pi K}$ וכך:

$$\rho(\vec{r}) = -A\vec{\nabla}^2\left(r^3\cos(\theta)\right) = -A\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\left(r^3\cos(\theta)\right)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\left(r^3\cos(\theta)\right)}{\partial\theta}\right)\right] = \dots$$

$$\dots = -A\left[\frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot 3r^2\right) + \frac{r^3}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot(-\sin\theta)\right)\right] = -A\left[\frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial\left(3r^4\right)}{\partial r} + \frac{r}{\sin\theta}\frac{\partial\left(-\sin^2\theta\right)}{\partial\theta}\right] = \dots$$

$$\dots = -A\left[\frac{\cos\theta}{r^2}\cdot 12r^3 + \frac{r}{\sin\theta}\cdot\left(-2\sin\theta\cos\theta\right)\right] = -A\left[12r\cos\theta - 2r\cos\theta\right] = -10Ar\cos\theta$$

ובסה"כ

$$\rho(\vec{r}) = -\frac{10\phi_0}{4\pi K R^3}\cdot r\cos\theta \tag{14}$$

נוודא יחידות:

$$\left[\frac{10\phi_0}{4\pi K R^3}\cdot r\cos\theta\right] = \left[\frac{\phi_0 r}{KR^3}\right] = \left[\frac{\phi_0}{KR^2}\right] = \left[\frac{KQ/R}{KR^2}\right] = \left[\frac{Q}{R^3}\right] = [\rho]$$

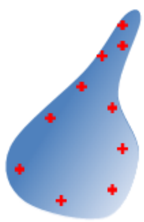
7.2 סעיף ב'

נשים לב כי $\rho(\theta) \propto -\cos\theta$ לכן כל חצי הכדור העליון הוא בעל מטען שלילי וחצי הכדור התחתון חיובי. יותר מזה ־ לכל נקודה בעלת מטען $-q$ הנמצאת בקורדינטה r,θ,ϕ יש נקודה בעלת מטען הפוך הנמצאת ב־$r,\pi-\theta,\phi$. המשמעות היא כי נוכל להתייחס אל הכדור הטעון כסט של דיפולים, ולכן במרחק רב יתנהג הכדור כדיפול. עבור דיפול $E \propto r^{-3}$ ולכן $\phi \propto r^{-2}$. מצאנו אם כן כי $\alpha = 2$

8 כולא ברקים

כידוע, ברקים נמשכים לפינות חדות ־ אנטנות, עצים, בניינים וכדומה. השאלה היא מדוע. ברק, כמו כל זרם חשמלי, נע ביתר קלות במקום בו יש מטענים חשמליים חופשיים וזה קורה כאשר השדה החשמלי חזק דיו כדי לעקור אלקטרונים מתוך האטום. עלינו להבין אם כן מדוע השדה החשמלי חזק יותר בקרבת עצמים מחודדים.

נדון למשל את בעצם שבשרטוט הבא ־ גוף טעון בעל צורה משונה הטעון במטען כולל חיובי. בשלב הראשון נניח כי



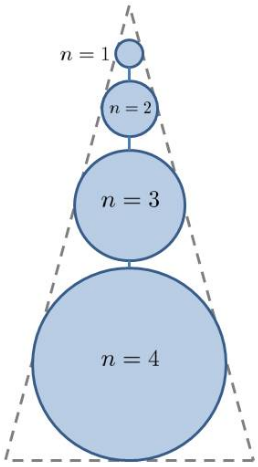
המטענים מתפלגים בצורה אחידה (צפיפות מטען משטחית קבועה). מאחר והמטענים דוחים זה את זה, ברור שהמטענים

החופשיים יתרחקו. לכן אם יש מטענים חופשיים הם יברחו אל חלקיו המרוחקים של הגוף. לפיכך אנו מצפים להצטברות מטען עודף בחלקו העליון והמחודד של הגוף.

ננסה לכמת את האפקט. כולא ברקים הוא בקירוב הפשוט ביותר חרוט העשוי חומר מוליך, אך בקירוב זה יהיה לנו קשה מאד לחשב את השדה לידו. נשתמש לכן בקריקטורה פשוטה של כולא ברקים כרצף של N כדורים המרוחקים זה מזה במידה שווה. הכדורים מחוברים זה לזה ועשויים מחומר מוליך כך שהפוטנציאל על כולם קבוע. כדי שהאפקט יהיה דומה לזה של חרוט, נאמר כי כל כדור גדול מקודמו ונניח למשל כי R_n רדיוס הכדור ה־n, פרופורציונלי ל־n כלומר:

$$R_n = nR_1$$

כעת נניח שמתחוללת סופת ברקים ־ מטענים זזים, הקרקע נהיית טעונה וכך גם כולא הברקים. נניח כי כולא הברקים



נטען במטען כולל Q ־ מהו המטען q_n בו נטען כל אחד מהכדורים?

מאחר ואנחנו יודעים כי הפוטנציאל החשמלי של כל הכדורים זהה, נסיק כי:

$$\frac{Kq_1}{R_1} = \frac{Kq_2}{R_2} = \frac{Kq_3}{R_4} = ... = \frac{Kq_N}{R_N}$$

וכיוון ש־$R_n = nR_1$, נסיק כי $q_n = nq_1$. מצד שני סכום כל המטענים הוא Q כלומר:

$$Q = \sum_{n=1}^{N} q_n = q_1 \sum_{n=1}^{N} n = \frac{q_1 N(N+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad q_1 = \frac{2Q}{N(N+1)}$$

לכן, בסה"כ המטען על הכדור ה־n הוא:

$$q_n = nq_1 = \frac{2nQ}{N(N+1)}$$

כעת נוכל לחשב מהו השדה החשמלי בקרבתו השפה של הכדור ה־n בכולא הברקים:

$$E_n = \frac{Kq_n}{R_n^2} = \frac{Kq_1 n}{R_1^2 n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{Kq_1}{R_1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2KQ}{R_1(N(N+1))}$$

כפי שאפשר לראות השדה החשמלי $E_n \propto \frac{1}{n}$ כלומר השדה סמוך לקצה החד של הכולא הוא הגדול ביותר. אם נניח כי חרוט, שם $R(z) \propto z$ מתנהג באופן איכותי בצורה דומה, נמצא כי השדה מתבדר בקרבת השפיץ.