חשמל ומגנטיות - תרגול 8

שדות חשמליים בחומרים דיאלקטריים - חזרה

בשעור זה נדבר על חומר דיאלקטרי הנמצא בשדה חשמלי. נזכיר את הגדרת וקטור הפולריזציה, או צפיפות הדיפולים:

$$\bar{P} = N\bar{p}$$

כאשר $\bar{p}$ הינו מומנט הדיפול ה"נקודתי", כלומר, מומנט הדיפול של אטום או מולקולה בחומר, ו־N הוא הצפיפות הנפחית של הדיפולים. בחומרים דיאלקטריים פשוטים, כמו אלה שנדון בהם בקורס, הפולריזציה הנוצרת בחומר הינה תגובה לניארית לשדה:

$$\bar{P} = \epsilon_0 \chi \bar{E}$$

χ הינו חסר יחידות ומשתנה בין חומרים שונים, ונקרא **הסוספטביליות** של החומר. $\bar{E}$ כאן הינו השדה בתוך החומר. הפולריזציה קשורה באופן ישיר לכמות המטען הקשור, כלומר - להתפלגות המטען המקומית הנוצרת עקב ההזזה הקטנה של מטענים בתוך החומר:

$$\sigma_b = \bar{P} \cdot \hat{n}$$
$$\rho_b = -\nabla \cdot \bar{P}$$

לפי חוק גאוס מתקיים $\nabla \cdot \bar{E} = \rho/\epsilon_0$ כאשר ρ הינו צפיפות המטען הכוללת, גם את המטען הקשור וגם מטענים חופשיים שהחומר עשוי להיות טעון בהם, $\rho = \rho_b + \rho_f$. מכאן נוכל לקבל:

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{-\nabla \cdot \bar{P} + \rho_f}{\epsilon_0} \to \nabla \cdot \left(\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}\right) = \rho_f$$

מגדירים את **שדה ההעתק** $\bar{D}$ להיות $\bar{D} \equiv \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$ ומקבלים

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_f$$

נגדיר את הקבוע הדיאלקטרי של החומר ϵ כך:

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} \to \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} = \epsilon \bar{E} \to \epsilon_0 \bar{E} + \epsilon_0 \chi \bar{E} = \epsilon \bar{E} \to \epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi)$$

שימושי גם להגדיר את הקבוע הדיאלקטרי היחסי $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$.

במעבר בין שני חומרים דיאלקטריים שונים, הרכיב הניצב לשפה של $\bar{D}$ עובר חלק (כל עוד אין גם קפיצה במטען החופשי). הרכיב הניצב לשפה של $\bar{E}$ קופץ עקב התפלגות המטען הקשור המשטחית על השפה, וכך גם $\bar{P}$. הרכיב המקביל לשפה של $\bar{E}$ עובר חלק.

$$E_{1,\parallel} = E_{2,\parallel}$$
$$D_{1,\perp} = D_{2,\perp}$$

דוגמא 1: קבל עם שני חומרים דיאלקטריים

נתון קבל בעל שטח לוחות A ומרחק בין הלוחות d ($d^2 \ll A$), המונח בניצב לציר x. לוח אחד נמצא ב־$x=0$. בין $0<x<a<d$ ישנו חומר דיאלקטרי עם קבוע ϵ_1, ובשאר הנפח חומר דיאלקטרי עם קבוע ϵ_2. הקבל מחובר למקור מתח V.

1. חשב את צפיפות המטען על הלוחות ואת קיבול הקבל.
2. חשב את צפיפות המטען הקשור. כמה מטען קשור סה"כ יש בחומר הדיאלקטרי?

פתרון:

1. מסימטריית הבעיה נניח שהשדות E, D הינם בכיוון x, ומכאן שהם ניצבים למשטח שבין החומרים. בתוך החומר הדיאלקטרי אין מטען חופשי כלל, ולכן D רציף שם. נסמן את צפיפות המטען החופשי ב־σ_f. נשתמש בחוק גאוס האינטגרלי עבור $\bar{D}$ כדי לקבל $D=\sigma_f$. כעת, מתקיים עקב רציפות D והקשר בין E ו־D:

$$\epsilon_1 E_1 = D = \epsilon_2 E_2$$

נחשב את האינטגרל הקווי על השדה החשמלי, מה שנותן את הפרש הפוטנציאל:

$$V = aE_1 + (d-a)E_2 = \left(\frac{a}{\epsilon_1} + \frac{d-a}{\epsilon_2}\right)\sigma_f$$

זה נותן לנו את צפיפות המטען החופשי על הלוחות. את צפיפות המטען הקשור נקבל בעזרת הפולריזציה:

$$P_i = D - \epsilon_0 E_i = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_i}\right) D = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_i}\right)\sigma_f$$

ומכאן ש־

$$\sigma_{b,i} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_i}\right)\sigma_f$$

זהו קשר בין צפיפות המטען הקשור והחופשי (שהגיע מהסוללה). תוצאה זו נכונה בערך מוחלט - על הלוח החיובי יש להוסיף סימן מינוס, כי שם P מצביע אל תוך החומר הדיאלקטרי, בכיוון מנוגד לוקטור הניצב לשפה. צפיפות המטען על הלוחות הינה הסכום של צפיפות המטען החופשי וצפיפות המטען הקשור. נשים לב ש־P קבוע, ומכאן שצפיפות המטען הקשור בנפח היא אפס.
את קיבול הקבל נחשב בשתי דרכים: דרך ראשונה היא ע"י חיבור שני קבלים בטור, כאשר זוכרים שבהכנסת חומר דיאלקטרי,

$$C = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} C_0$$

כאשר C_0 הוא הקיבול ללא חומר דיאלקטרי. מכאן:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\epsilon_1 A/a} + \frac{1}{\epsilon_2 A/(d-a)} \to C = \frac{\epsilon_1\epsilon_2 A}{\epsilon_2 a + \epsilon_1 (d-a)}$$

נשים לב שהגבולות $a \to 0$ ו־$a \to d$ הגיוניים. הדרך השנייה היא ע"י הגדרת הקיבול. ניעזר בצפיפות המטען החופשי שמצאנו קודם:

$$C = \frac{Q_{free}}{V} = \frac{A\sigma_f}{V} = \frac{A}{\left(\frac{a}{\epsilon_1} + \frac{d-a}{\epsilon_2}\right)} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 A}{\epsilon_2 a + \epsilon_1 (d-a)}$$

2. את צפיפות המטען הקשור על הלוחות מצאנו כבר. נותר למצוא את המטען הקשור שנמצא בשפה שבין שני החומרים, ע"י הקפיצה ב־P:

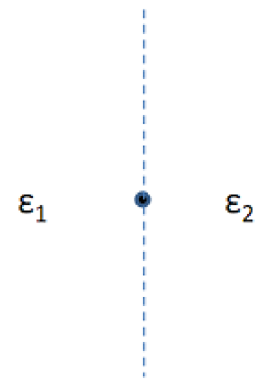
$$\sigma_{b,in} = \bar{P}_1 \cdot \hat{x} + \bar{P}_2 \cdot (-\hat{x}) = -(P_2 - P_1) = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right)\sigma_f$$

כעת, נשים לב שסה"כ המטען הקשור מתאפס:

$$\sigma_{b,1} + \sigma_{b,2} + \sigma_{b,in} = -\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right)\sigma_f + \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}\right)\sigma_f + \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right)\sigma_f = 0$$

דוגמא 2: מטען בין שני חומרים דיאלקטריים

מטען נקודתי q מונח על השפה המפרידה בין שני חצאי מרחבים אינסופים שקבועיהם הדיאלקטרים הם ϵ_1, ϵ_2. מצאו את שדה המעתק $\vec{D}$, את השדה החשמלי $\vec{E}$ ואת הפוטנציאל החשמלי בכל המרחב (הניחו שלשדה החשמלי סימטריה רדיאלית).



פתרון

נניח כי לשדה החשמלי סימטריה רדיאלית בכל חצי מרחב, דהיינו $\vec{E}_1(\vec{r}) = E_1(r)\hat{r}$ עבור $z > 0$ ו־$\vec{E}_2(\vec{r}) = E_2(r)\hat{r}$ עבור $z < 0$. כיוון שרכיב השדה המקביל למשטח הפרדה בין חומרים דיאלקטריים רציף (ואכן $\hat{r}$ מקביל למישור $z = 0$), אז מתקיים $E_1(z = 0) = E_2(z = 0)$. המסקנה היא שלשדה יש סימטריה רדיאלית בכל המרחב $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$. נקח אם כן מעטפת גאוס כדורית ברדיוס r

$$q = \int \vec{D} \cdot d\vec{s} = 2\pi r^2 D_1 + 2\pi r^2 D_2 = 2\pi r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2) E$$

לכן

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r^2}\hat{r}$$

הפוטנציאל הוא כמובן

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r}$$

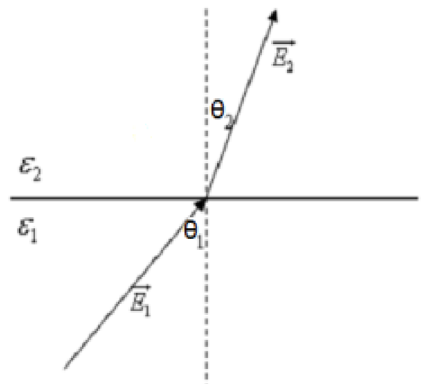
השתמשנו כאן בניחוש של סימטריה רדיאלית, שלא מובן מאליו שמתקיימת מראש. כדי לוודא שההנחות שלנו אכן נכונות, אפשר לבדוק שהפתרון הזה מקיים את המשוואת פואסון עם תנאי השפה הבאים:

$$\phi(r \to \infty) = 0$$
$$\epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z}\Big|_{z=0} = \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z}\Big|_{z=0}$$
$$\frac{\partial \phi_1}{\partial s}\Big|_{z=0} = \frac{\partial \phi_2}{\partial s}\Big|_{z=0}$$

כאשר s היא קואורדינטה רדיאלית במישור xy. תנאי השפה מתקיימים בפתרון שלנו (התנאי השני הוא המעבר החלק של D, ואצלנו הנגזרת לפי z מתאפסת ב־$z = 0$, והתנאי השלישי הוא על השדה, שאכן עובר רציף) וכן הפתרון מקיים את משוואת פואסון.

דוגמא 3: זווית השבירה של קווי שדה

הראו כי על משטח הפרדה בין שני חומרים דיאלקטריים קווי השדה נשברים כך שמתקיים $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{tan\theta_1}{tan\theta_2}$, כאשר ϵ_1, ϵ_2 הם המקדמים הדיאלקטריים של החומרים ו־θ_1, θ_2 הן הזוויות בין קווי השדה ובין הנורמל למשטח ההפרדה.



פתרון

מספיק יהיה למצוא את הקשר בין זווית הפגיעה והשבירה ובין המקדמים הדיאלקטריים.
נשתמש בתנאי המעבר של השדות $(D_{1\perp} = D_{2\perp}, E_{1||} = E_{2||})$ ונקבל:

$$\frac{tan\theta_1}{tan\theta_2} = \frac{\frac{E_{1\|}}{E_{1\perp}}}{\frac{E_{2\|}}{E_{2\perp}}} = \frac{E_{1\|}}{E_{2\|}} \cdot \frac{E_{2\perp}}{E_{1\perp}} = \frac{E_{1\|}}{E_{2\|}} \cdot \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cdot \frac{D_2\perp}{D_1\perp} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

דוגמא 4: מערכת קליפות עם חומרים דיאלקטריים

נתונה המערכת הבאה: מטען נקודתי q נמצא במרכזה של קליפה כדורית בעלת רדיוס פנימי R_1 ורדיוס חיצוני R_2. הקליפה מלאה בחומר בעל מקדם דיאלקטרי ϵ_1. בין רדיוס R_2 לרדיוס R_3 ישנה קליפה נוספת המלאה בחומר דיאלקטרי בעל מקדם ϵ_2. בין רדיוס R_3 לרדיוס R_4 ישנה קליפה מוליכה נייטרלית.

1. מהו השדה החשמלי בכל המרחב?
2. מהי צפיפות המטען הנפחית וצפיפות המטען המשטחית המושרות בחומרים הדיאלקטריים?
3. מהי צפיפות המטען על הקליפה המוליכה?

פתרון:

1. בתוך המוליך השדה הינו 0. בכל מקום אחר, ניתן לחשב את D ע"י חוק גאוס ולקבל:

$$\bar{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

מכאן שהשדה הוא:

$$\bar{E}=\begin{cases}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} & r<R_1\\ \frac{q}{4\pi\epsilon_1 r^2}\hat{r} & R_1<r<R_2\\ \frac{q}{4\pi\epsilon_2 r^2}\hat{r} & R_2<r<R_3\\ 0 & R_3<r<R_4\\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} & R_4<r\end{cases}$$

2. וקטור הפולריזציה מקיים:

$$\bar{P}=D-\epsilon_0 E_i=\left(1-\frac{\epsilon_0}{\epsilon_i}\right)D=\left(1-\frac{\epsilon_0}{\epsilon_i}\right)\frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

מכאן מתקבל שצפיפות המטען הנפחי הקשור היא אפס, מכיוון ש־

$$\rho_b=-\nabla\cdot\bar{P}=0$$

ישנה צפיפות משטחית בשפות. ב־R_1:

$$\sigma_{b,1}=\left(1-\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right)\frac{q}{4\pi R_1^2}\hat{r}\cdot(-\hat{r})=-\left(1-\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right)\frac{q}{4\pi R_1^2}$$

ב־R_2:

$$\sigma_{b,2}=\left(\left(1-\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}\right)\frac{q}{4\pi R_2^2}\hat{r}\cdot(-\hat{r})+\left(1-\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right)\frac{q}{4\pi R_2^2}\hat{r}\cdot(\hat{r})\right)=\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}-\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right)\frac{q}{4\pi R_2^2}$$

ב־R_3:

$$\sigma_{b,3}=\left(1-\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}\right)\frac{q}{4\pi R_3^2}\hat{r}\cdot(\hat{r})=\left(1-\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}\right)\frac{q}{4\pi R_3^2}$$

אם נחשב את המטען הקשור הכולל ע"י כפל בשטח הקליפות עליהן חישבנו את הצפיפות, נקבל אפס, כצפוי.

3. השדה בתוך הקליפה המוליכה הינו אפס, ולכן מחוק גאוס בשילוב עם הסימטריה הכדורית אנו יודעים שסך כל המטען על חלקה הפנימי יהיה $-q$, ויתפזר עליה הצופה אחידה. מכאן שהצפיפות עליה היא

$$\sigma_4=-q/4\pi R_3^2$$

מכיוון שהקליפה המוליכה נייטרלית, על חלקה החיצוני נקבל מטען q, וצפיפות:

$$\sigma_5=-q/4\pi R_4^2$$

דוגמא 5: חומר דיאלקטרי משתנה

נתון קבל לוחות כך שהלוחות מאונכים לציר ה־x ובעלי שטח A. המרחק בין הלוחות הינו $d \ll \sqrt{A}$. בין לוחות הקבל ישנו חומר בעל קבוע דיאלקטרי $\epsilon(x) = (1 + x/d)\epsilon_0$.

(א) מהו הקיבול?

(ב) מהי התפלגות המטען המושרה בחומר כאשר הקבל מחובר למקור מתח קבוע V?

(ג) הראו מפורשות שהמטען הכולל בחומר הוא אפס.

פתרון

(א) הואיל והמקדם משתנה רק לאורך ציר ה־x נוכל להניח את הסימטריה הרגילה של לוח אינסופי. נניח שהלוח במישור $x = 0$ טעון $-Q$ והלוח השני טעון Q וניקח מעטפת גאוס בשטח a המקיפה את הלוח החיובי. אזי

$$Da = \sigma_f a = \frac{Q}{A}a$$

לכן

$$E(x) = -\frac{D}{\epsilon(x)} = -\frac{Q}{\epsilon_0 A}\frac{d}{x+d}$$

סימן המינוס קובע את כיוון השדה (בשוויון הקודם כתוב ערכו המוחלט של שדה המעתק). המתח על הקבל הינו

$$V = -\int_0^d E(x)dx = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}\int_0^d \frac{dx}{x+d} = \ln 2\frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

הקיבול הוא איפוא

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d \ln 2}$$

דרך אחרת לחישוב הקיבול היא חיבור קבלים בטור: במיקום x ישנו קבל בעל עובי dx (דק מאוד). הקיבול שלו הוא

$$dC = \epsilon(x)\frac{A}{dx}$$

נחבר את כל הקבלים האלה בטור:

$$\frac{1}{C} = \int_0^d \frac{dx}{A\epsilon(x)} = \frac{1}{A\epsilon_0}\int_0^d \frac{dx}{(1+x/d))} = \frac{d}{A\epsilon_0}ln(2) \rightarrow C = \frac{A\epsilon_0}{d\, ln(2)}$$

(ב) הפולריזציה הינה

$$P = (\epsilon - \epsilon_0)E = \frac{x}{d}\epsilon_0 E = -\frac{Qd}{\epsilon_0 A}\frac{\epsilon_0 x}{d(x+d)} = -\frac{V}{\ln 2}\frac{\epsilon_0 x}{d(x+d)}$$

צפיפות המטען הנפחית בתוך החומר היא

$$\rho_p = -\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{V}{\ln 2}\frac{\epsilon_0}{(x+d)^2}$$

(ג) סך המטען בתוך החומר הנו

$$q = A\int_0^d \rho_p(x)dx = \frac{\epsilon_0 VA}{\ln 2}\int_0^d \frac{dx}{(x+d)^2} = \frac{\epsilon_0 VA}{2\ln 2 \cdot d}$$

בנוסף, בצמוד ללוח השלילי מצטברת צפיפות משטחית $\sigma_p = P(0) = 0$ ובצמוד ללוח החיובי מצטברת צפיפות $\sigma_p = P(d)$ ובסך הכל על שפת החומר הדיאלקטרי ישנו מטען

$$q_b = \sigma A = P(d)A = -\frac{\epsilon_0 VA}{2\ln 2 \cdot d} = -q$$

כלומר בסך הכל המטען בחומר הדיאלקטרי הוא כמובן אפס.