קוסמולוגיה - תרגול 5

סטטיסטיקה של פלוקטואציות וה- Power Spectrum

אנו מניחים תמיד כי על סקלות מספיק גדולות, היקום הוא הומוגני ואיזוטרופי.

הנחת יסוד שמסתתרת מאחורי הטענה הזו היא שבזמנים מספיק מוקדמים, היקום היה הומוגני בדיוק מפליא, על כל סקלה מעבר לסקלות מאוד קטנות, ואז הכוכבים, הגלקסיות, צבירי הגלקסיות ומבנים גדולים אף יותר נוצרו מגידול של ההפרעות המזעריות הללו, בעקבות אי-יציבויות גרביטציוניות.

נרצה עתה לדון בסטטיסטיקה של ההפרעות הללו.

במקום לדבר על שדה הצפיפות בכל נקודה, נדבר על ה- overdensity בנקודה $\vec{x}$ ($\vec{x}$ is a co-moving coordinate)

$$\boxed{\delta(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\rho_0} - 1}$$

ρ_0 היא הצפיפות הממוצעת בנפח V שהוא מספיק גדול כך שניתן להתייחס אליו כהומוגני, $\vec{x}$ היא קורדינטת co-moving כך שהמרחק הפיזיקלי לנקודה $\vec{x}$ מהראשית היא $\boxed{a(t)\cdot|\vec{x}| = r}$

ביקום האמיתי, יש ל-$\delta(\vec{x})$ ערך מוגדר בכל נק' $\vec{x}$. אבל, אין לנו איך לדעת מה היה הערך הזה ביקום המוקדם (בתחום הליניארי, כאשר עדיין התקיים $|\delta| \ll 1$). אם כן, טבעי להניח שהערך הספציפי של $\delta(\vec{x})$ בנקודה ספציפית הוא עניין מקרי, ובעצם לדון על $\delta(\vec{x})$ כעל <u>שדה של משתנים מקריים</u> (Random Field)

כלומר בעצם אנו כבר לא דנים ביקום שהוא הומוגני באמת, אלא ביקום שהוא הומוגני מבחינה סטטיסטית (Statistically homogeneous)

כלומר שהתכונות הסטטיסטיות של $\rho(\vec{x})$ בכל נפח V מספיק

גדול, הינן בלתי תלויות במיקום מרכזו של V.
למעשה, אנחנו מניחים שהיקום הוא ארגודי, כלומר שממוצע בנקודה מסויימת ע"פ יקומים שונים שקול לממוצע ביקום מסויים ע"פ נקודות שונות.

ברור ש- $\delta(\vec{x})$ פונק' רציפה, ולכן הערכים "הרנדומאליים" ש-δ מקבל בנקודות סמוכות $\vec{x}'$, $\vec{x}'+\vec{x}$ חייבות שתהיה ביניהן קורלציה כלשהי.
אי הוודאות ב- $\delta(\vec{x}'+\vec{x})$, בהינתן $\delta(\vec{x}')$, שואפת לאפס כאשר $\vec{x}\to 0$.

מגדירים את פונקציית הקורלציה (Correlation Function)

$$\boxed{\xi(\vec{x})\equiv\langle\delta(\vec{x}')\,\delta(\vec{x}'+\vec{x})\rangle}$$

כאשר סימן ה- $\langle\,\rangle$ משמע לקיחת ממוצע, והנחת ההומוגניות הסטטיסטית מאפשרת לנו לפרש זאת כממוצע על כל הנקודות $\vec{x}'$.
אם היקום הוא גם איזוטרופי (סטטיסטית) אז חייב להתקיים

$$\boxed{\xi(\vec{x})=\xi(x)} \quad (x\equiv|\vec{x}|)$$

בלתי תלוי בכיוון

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\xi(x)\equiv\langle\delta(\vec{x}')\,\delta(\vec{x}'+\vec{x})\rangle}$$

לשם פשטות, נבצע את הממוצעים בשלב הזה בתוך נפח גדול (אך סופי) V, שלצורך העניין יהיה קובייה עם צלע $V^{1/3}$.

נניח עוד כי הנפח הוא בעל תנאי שפה מחזוריים, שברגע ש-V גדול מספיק, זה לא משפיע על התוצאה, וזה גם מוצדק בגלל ההומוגניות.

בתוך הקוביה המחזורית הזו, ניתן לבצע טרנספורם פורייה לפונקציה $\delta(\vec{x})$ באופן הבא:

$$\boxed{\delta(\vec{x}) = \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \qquad \delta_{\vec{k}} = \int_V d^3x\, \delta(\vec{x})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{V^{1/3}}\vec{n}, \quad \vec{n}=(n_1,n_2,n_3)$$
שלשה של מספרים טבעיים

- קל לוודא שזה אכן קונסיסטנטי עם ההגדרה של טרנספורם פורייה, ושאכן ההגדרות של $\delta(\vec{x})$ ו- $\delta_{\vec{k}}$ קונסיסטנטיות:

$$\boxed{\delta_{\vec{k}}} = \int_V d^3x \left(\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}'} \delta_{\vec{k}'} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}}\right) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}'}\delta_{\vec{k}'}\int_V d^3x\, e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}'}\delta_{\vec{k}'}\cdot V \underbrace{\delta_{\vec{k},\vec{k}'}}_{\text{Kronicker }\delta} = \boxed{\delta_{\vec{k}}} \checkmark$$

- שימו לב ש- $\delta(\vec{x})$ חסר יחידות, אך ל- $\delta_{\vec{k}}$ יש יחידות של נפח.
- הגבול $V\to\infty$ ניתן ע"י המעבר לרצף של $\vec{n}$ ומתקבל:

$$\boxed{\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}}} \longmapsto \frac{1}{V}\int d^3n \longmapsto \boxed{\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k}$$

- שימו לב שמכיוון שלפי ההגדרה $\langle\delta(\vec{x})\rangle = 0$, מתקיים $\boxed{\delta_{\vec{k}=0} = 0}$
- שימו לב שבות הסכום $\sum_{\vec{k}}$ אנו מבצעים גם על $-\vec{k}$ ושמתקיים $\boxed{\delta_{-\vec{k}} = \delta^*_{\vec{k}}}$, וזה מבטיח ש $\delta(\vec{x})$ ממשי, כנדרש.
- סה"כ נקבל עבור פונקציית הקורלציה:

$$\boxed{\xi(x) = \frac{1}{V^2}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\langle\delta_{\vec{k}}\delta_{\vec{k}'}\rangle e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{x}'} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}$$

אבל שמאל שלו תלוי ב- $\vec{x}'$, ולכן בממוצע יתן לגו. מכאן מסיקים

$$\boxed{\langle \delta_{\vec{k}}\, \delta_{\vec{k}'} \rangle = 0 \quad \text{if } \vec{k}' \neq -\vec{k}}$$

$\Leftarrow$ ~~בין~~ בין הפרעות של סקלות $\vec{k}$ שונות, אין קורלציה!

$$\xi(x) = \frac{1}{V^2} \sum_{\vec{k}'} \langle \delta_{-\vec{k}} \delta_{\vec{k}} \rangle e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \quad \Leftarrow$$

$$= \frac{1}{V^2} \sum_{\vec{k}} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \equiv \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \xi(x) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ P(\vec{k}) \equiv \frac{1}{V} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle \end{gathered}}$$

$\longrightarrow$ Power Spectrum of fluctuations

- בגלל האיזוטרופיות של היקום, חייב להתקיים $P(\vec{k}) = P(k)$ כלומר ללא תלות בכיוון.
- שימו לב שבנוסף ל- $\delta_{\vec{k}}$, גם ל- $P(k)$ יש יחידות של נפח.
- למעשה, $P(k)$ הוא טרנספורם פורייה של $\xi(x)$

The power spectrum is the Fourier Transform of the correlation function.

- הערכת "הצפיפות היתר" הריבועי

$$\boxed{\langle \delta^2(\vec{x}) \rangle = \xi(0) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} P(k)}$$

Gaussian Random Fields , שדות גאוסיים

מתמטית, אומר על שדה של משתנים מקריים שהוא מהווה שדה גאוסי, אם פרט לאילוץ שרכיבי הפורייה שלו מקיימים $\delta_{-\vec{k}}=\delta^*_{\vec{k}}$ (כשזה חיוני כדי להבטיח את ממשיות $\delta(\vec{x})$) אין עוד תלות בין רכיבי הפורייה השונים.

(כלומר, עבור $\delta_{\vec{k}}=a+ib$, אזי אם ההסתברות למצוא את $\delta_{\vec{k}}$ בנפח אינפיניטסימלי במישור המרוכב $da\,db$ היא $P_{\vec{k}}(\delta_{\vec{k}})\,da\,db$, וההסתברות למצוא את $\delta_{\vec{k}'}$ בנפח $da'db'$ הוא $P_{\vec{k}'}(\delta_{\vec{k}'})\,da'db'$, אז כל עוד $\vec{k}'\neq\pm\vec{k}$ ההסתברות למצוא את $\delta_{\vec{k}}$ בנפח $da\,db$ וגם למצוא את $\delta_{\vec{k}'}$ בנפח $da'db'$ הוא $P_{\vec{k}}(\delta_{\vec{k}})P_{\vec{k}'}(\delta_{\vec{k}'})\,da\,db\,da'db'$)

במילים אחרות:
$$\delta(\vec{x})=\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}}{}'\left(\delta_{\vec{k}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\delta_{-\vec{k}}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right)$$

כאשר $\sum'_{\vec{k}}$ מייצג סכום על חצי מרחב $\vec{k}$, ומתקיים שכל איבר בסכום $\delta_{\vec{k}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\delta_{-\vec{k}}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ הוא משתנה מקרי ממשי, וכל המשתנים בלתי תלויים.

משפט הגבול המרכזי אומר לנו שסכום על $\underbrace{\text{משתנים}}_{\text{מספר גדול של}}$ מקריים בלתי תלויים הוא בעל התפלגות נורמאלית (גאוסיאן).
כלומר הסיכוי למצוא את $\delta(\vec{x})$ באינטרוול $(\delta,\delta+d\delta)$ הוא:

$$\boxed{dP=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}d\delta \qquad \sigma^2=\langle\delta^2(\vec{x})\rangle}$$

σ^2 הוא השונות של השדה $\delta(\vec{x})$ והיא בלתי תלויה במיקום $\vec{x}$.

מודלים אינפלציוניים מנבאים שהפלוקטואציות בצפיפות אכן יהוו שדה גאוסי, והתצפיות מראות שאכן כך המצב, עד כדי **אי-דיוקים במדידות.**

שימו לב, שזה גם אומר שכל גודל שהוא ליניארי ב-δ יהווה שדה גאוסי. למשל:

$$\vec{\nabla}\delta = \frac{i}{V}\sum_{\vec{k}}\delta_{\vec{k}}\,\vec{k}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

הוא שדה גאוסי ממשפט הגבול המרכזי.

ניתן גם בקלות לראות שהתפלגויות משותפות של פלוקטואציות בנקודות שונות (Joint Probability Distributions), כלומר

$$\vec{u} \equiv (\delta_1, \ldots, \delta_D) \,, \quad \delta_i \equiv \delta(\vec{x}_i)$$

מתפלגת בצורה גאוסית, כאשר השונות (או במקרה הרב-מימדי ה-Co-variance Matrix) נתון ע"י ה-Power-Spectrum $P(k)$ בלבד!

זוהי תכונה מאוד חשובה של שדות גאוסיים רנדומיים: כל התכונות הסטטיסטיות שלהם נתונות ע"י ה-Power Spectrum בלבד!

Filtering

על מנת להבין טוב יותר מה המשמעות של $P(k)$, נדמיין שאנחנו מחליקים את שדה הפלוקטואציות על סקלות קטנות מסקלת-אורך (Smoothing Length) L.
הדבר שקול לקונבולוציה של $\delta(\vec{x})$ עם פונקציית חלון $W(x)$ כדי לקבל שדה מוחלק $\delta_L(\vec{x})$

$$\boxed{\delta_L(\vec{x}) \equiv \int d^3x'\, W(\vec{x}-\vec{x}')\,\delta(\vec{x}') \,, \quad \int d^3x\, W(\vec{x}) = 1 \,, \quad W(\vec{x}) \simeq 0 \text{ for } |\vec{x}| \gtrsim L}$$

$\delta_L(\vec{x})$ לוקח את השדה בנק' $\vec{x}$ ומחליק אותו עם השדה
בכל הנקודות עד מרחק $\sim L$ מ' $\vec{x}$.

$$\boxed{\delta_L(\vec{x}) = \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} \delta_{L\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}$$

במרחב פורייה, מתקיים:

$$\boxed{\delta_{L\vec{k}} = \tilde{W}(\vec{k})\cdot\delta_{\vec{k}}}$$

כאשר:

$$\boxed{\tilde{W}(\vec{k}) \equiv \int d^3x\, W(\vec{x})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}$$

(קונבולוציה במרחב הממשי היא מכפלה במרחב פורייה)

כלומר, ההחלקה מקטינה את רכיבי הפורייה בפקטור $|\tilde{W}(\vec{k})|$,
כאשר $\boxed{\tilde{W}(0) = 1}$, $\boxed{\tilde{W}(\vec{k}) \longrightarrow 0 \text{ עבור } |\vec{k}| > \frac{2\pi}{L} \equiv K}$

נאמר שלפילטר W יש סקלה של K^{-1}.

מאוד אינפורמטיבי לעבוד עם sharp-k-space filter,
כלומר כזה שמאפס תנודות לכל $k > K$. במילים אחרות,
פונקציית מדרגה:

$$\boxed{\tilde{W}(\vec{k}) = \Theta(K-k)} = \begin{cases} 0 & k > K \\ 1 & k < K \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$W(\vec{x}) = \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} \tilde{W}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_0^{K} k^2 dk\, d(\cos\theta)\, d\varphi \left(e^{ikx\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^K \frac{k^2}{ikx}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) dk = \frac{1}{2\pi^2 x}\int_0^K k \sin(kx)\, dk =$$

$$\cancel{\frac{1}{2\pi^2 x}\left[-\frac{k^2\cos(kx)}{x}\Big|_0^K + \int_0^K 2k\cos(kx)\, dk\right] =}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2\pi^2 x}\left[-K\cos(Kx) + \frac{2}{K}\right]}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 x^3}\int_0^{Kx} y\sin(y)\, dy = \frac{1}{2\pi^2 x^3}\left[-y\cos(y)\Big|_0^{Kx} + \int_0^{Kx}\cos(y)\, dy\right] =$$

$$\boxed{W(x) = \frac{1}{2\pi^2 x^3}\left[\sin(Kx) - Kx\cos(Kx)\right]}$$

בהינתן פונקצ"ית החלקה, ניתן להגדיר <u>מסה אופיינית</u> שקשורה בסקלת האורך של ההחלקה.

$$\boxed{M \equiv \rho_0 \int d^3x \, \frac{W(x)}{W(0)} = \frac{\rho_0}{W(0)}}$$

(שימו לב שמאחר שהגדרנו את $W(x)$, אכן יש לו יחידות של אחד חלקי נפח, ולכן $\left[\frac{\rho_0}{W(0)}\right] = [M]$)

זהו בעצם הצפיפות הממוצעת כפול הנפח הכלוא בתוך Smoothing Length אחד.

עבור ה- Sharp K-space filter מתקיים

$$\boxed{W_K(0) =} \lim_{x \to 0} \frac{K^3}{2\pi^2}\left[\frac{\sin(Kx)}{(Kx)^3} - \frac{\cos(Kx)}{(Kx)^2}\right] = \frac{K^3}{2\pi^2}\left[-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right] \boxed{= \frac{K^3}{6\pi^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{M_K = \frac{6\pi^2 \rho_0}{K^3}}$$

השונות בשדה הפלוקטואציות, כפי שראינו, ניתן ע"י

$$\sigma^2 = \xi(0) = \langle |\delta(x)|^2 \rangle = \frac{1}{V^2} \sum_{\vec{k}} |\delta_{\vec{k}}|^2 = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} P(k)$$

וניתן להגדיר את השונות האופיינית לפילטר עם רוחב K^{-1} (כלומר השונות בין אזורים שונים ביקום, שלכל אחד מימד אופייני של K^{-1}) ע"י:

$$\sigma_K^2 = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \tilde{W}_K^2(\vec{k}) P(k)$$

במקרה של הפילטר שדיברנו עליו, זה פשוט:

$$\sigma_K^2 = \frac{1}{V} \sum_{|k|<K} P(k) \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi \int_0^K k^2 P(k) \, dk$$

$$\boxed{\sigma_K^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^K k^2 P(k) \, dk}$$

השונות בין אזורים עם גודל אופייני K^{-1} נתון ע"י האינטגרל של ה- Power spectrum עד כקור ברקים K.

Harrison-Zeldovich Power Spectrum

נניח מקרה פשוט שבו $P(k) \propto k^n$.

כלומר אין לו סקלה אופיינית במרחב k.

במקרה כזה:

$$\boxed{\sigma_K^2} \propto \int_0^K k^{n+2}\,dk \propto \boxed{K^{n+3}}$$

עבור $n=0$ מתקבל $P(k)=\text{const}$, כלומר כל הסקלות נראות בדיוק אותו הדבר מבחינתי.

זה, בעצם אומר ש: $|\delta_k|^2=\text{const}$, כלומר האמפליטודה של הפלוקטואציות בכל k היא זהה, וסקלות שונות נבדלות זו מזו רק ע"י פאזה (לכל היותר).

זה בעצם תיאור לרעש לבן White Noise.

במקרה כזה:

$$\boxed{\sigma_K \propto K^{3/2}}$$

ניתן לפרש זאת באופן הבא:

אם נניח ~~שצפיפות החומר במקום היא קבועה ואחידה~~ שהחומר מורכב ממסות נקודתיות שמפוזרות רנדומלית עם צפיפות ממוצעת n, אז מספר הנקודות בנפח נתון $V=K^{-3}$ מתפלג פואסונית. המספר הממוצע הוא $N=nK^{-3}$ והשונות היא $\sigma_N^2=N$.

לכן, סטיית התקן היחסית היא:

$$\boxed{\frac{\sigma_N}{N}=N^{-1/2}\propto K^{3/2}}$$

זהו בדיוק σ_K (סטיית התקן ב: $\delta(x)\equiv\frac{\rho(x)}{\rho_0}$)

כלומר $P\propto k^n$ עבור $n=0$ מתאר תהליך פואסון.
(מהלך שיכור)

עבור סבח, נקבל $\sigma_K \propto K^{\frac{3+n}{2}}$, כלומר השיפוע חזק יותר.
לכן, על סקלות גדולות (K קטן), ספקטרומים עם סבח יהיו חלקים יותר מפוסוון.

קוגמאו חשובה נוספת היא $n=1$, המכונה
The Harrison-Zeldovich Power Spectrum

כדי להבין את החשיבות של $n=1$, נתבונן בפלוקטואציות בפוטנציאל הגרביטציוני, $\delta\phi$, הנובעות מהפלוקטואציות בצפיפות $\delta\rho$.
מיחסות כללית, ידוע שהמטריקה עצמה תלויה בי ϕ ולכן פלוקטואציות בי ϕ "יגררו" פלוקטואציות במטריקה.
אם אלה אינן אחידות על כל סקלה, בדיוק נאבד את ההומוגניות והאיזוטרופיות.
ספציפית, אם $\delta\rho$ גדול מדי על סקלות גדולות, אז היקום לא יהיה הומוגני/איזוטרופי על סקלות גדולות.
אם $\delta\rho$ גדול מדי על סקלות קטנות, נקבל שמערכות קטנות תהיינה רלטיביסטיות, ויהיו מלא חורים שחורים בכל מקום.
לכן, נרצה $\delta\phi = const$.

$$\rho_{RMS}(K) \approx \rho_0 \sigma_K \propto K^{\frac{3+n}{2}}$$

RMS ≡ Root Mean Squared

$$M_{RMS}(K) \approx \rho_{RMS}(K) \cdot K^{-3} \propto K^{\frac{n-3}{2}}$$

$$\boxed{\phi_{RMS}(K) \approx G M_{RMS}(K) \cdot K \propto K^{\frac{n-1}{2}}}$$

Scale Invariant Power Spectrum $\boxed{n=1 \iff \phi_{RMS}(K) = const}$

זה גם הניבוי מתאוריות אינפלציוניות סטנדרטיות.
בפועל, מודדים $\boxed{n \approx 0.96\text{-}0.97}$ (כלומר לא בדיוק הומוגני על סקלות ממש גדולות)