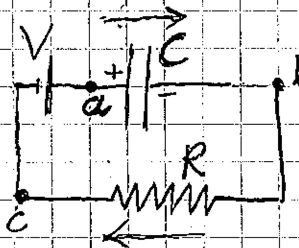
תרגול 10 - חוקי קירכהוף ומעגלי RC

במהלך השבועות שעברו הכרנו שני רכיבים אלקטרוניים - הקבל והנגד.
בתרגול זה נדון בעיקר במעגלים הכוללים חיבור של הרכיבים הללו.

ניקח למשל את המעגל הפשוט הבא, כאשר ברגע $t=0$ נניח כי המטען על הקבל אפס.



נשים לב שבתנועה מנקודה a ל-b, הלך המתח יורד בכדי: $V_c=\frac{Q}{C}$
לאחר מכן בין b ל-c המתח יורד ב- IR ולבסוף בין c ל-a עולה ב- V וכך כדי שנחזור ב-a לאותו "פוטנציאל"

$$\frac{Q}{C}+IR=\frac{Q}{C}+\dot{Q}R=V$$

כעת: משוואה זו נוכל לפתור, נשער כי $Q(t)=Q_{s.s}+Q_H(t)$

$$\frac{Q_H(t)}{C}+\dot{Q}_H R=0 \Rightarrow Q_H(t)=Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{Q_{ss}}{C}=V \Rightarrow Q_{ss}=CV$$

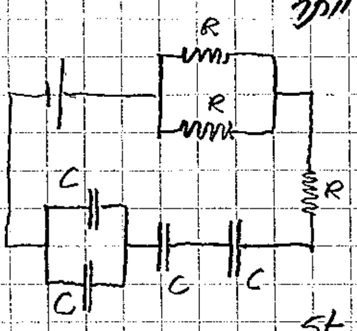
ובסה"כ מצאנו כי

$$Q(t)=CV+Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

ואכן

$$\frac{Q}{C}+\dot{Q}R=\frac{CV}{C}+\frac{Q_0}{C}e^{-\frac{t}{RC}}+\left(-\frac{1}{RC}\right)Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}R=V$$

באופן דומה נוכל לפתור מעגלים מורכבים יותר



$$R_{tot}=R+\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\right)^{-1}=\frac{3}{2}R$$

$$\Longrightarrow C_{tot}=\left[\frac{1}{C}+\frac{1}{C}+\frac{1}{2C}\right]^{-1}=\frac{2}{5}C$$

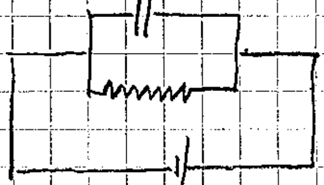
$$\Downarrow$$

$$Q(t)=\frac{2}{5}CV+Q_0 e^{-\frac{5t}{3RC}}$$

ומתנאי ההתחלה $Q(t=0)$ נסיק $Q(t)=\frac{2}{5}CV\left[1-e^{-\frac{5t}{3RC}}\right]$

חוקי קירכהוף

אם כן, מצאנו דרך לפתור מעגל RC ברגע שיודעים לזהות מפורשות האם הקבלים/נגדים מחוברים בטור או במקביל. אבל מה נעשה אם למשל עלינו לפתור את המעגל הבא!

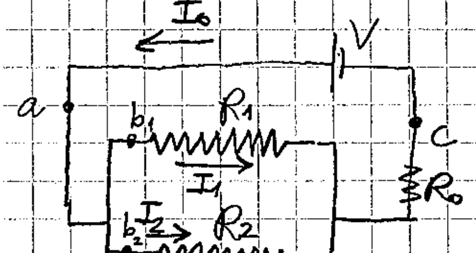


במעגל הזה אין חיבור נקי בטור או במקביל, אין חיבור קבלים בטור או במקביל וכדי לפתור אותו עלינו להיעזר בחוקי קירכהוף.

בבסיס חוקי קירכהוף:

- סכום כל הזרמים הנכנסים לצומת שווה לסכום הזרמים היוצאים ממנו
- מתח של לולאה סגורה מתאפס

נראה דוגמא טריוויאלית לשימוש בקירכהוף



עלינו למצוא את I_1:

מצד אחד $I_0 = I_1 + I_2$

מצד שני $V = I_1R_1 + I_0R_0$ (לולאה a, b_1, c)

$V = I_2R_2 + I_0R_0$ (לולאה a, b_2, c)

וכך בסה"כ יש 3 משוואות ושלושה נעלמים ונוכל לפתור

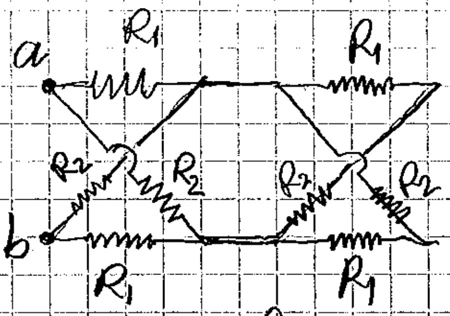
נציב את I_0:

$$V = I_1R_1 + I_1R_0 + I_2R_0$$
$$V = I_2R_2 + I_1R_0 + I_2R_0$$

מחיסור המשוואות נקבל $I_1R_1 = I_2R_2$ ולכן $I_2 = \frac{R_1}{R_2}I_1$ וכך

$$V = I_1\left(R_1 + R_0 + \frac{R_1R_0}{R_2}\right) \Longrightarrow I_1 = \frac{V}{R_1 + R_0 + \frac{R_1R_0}{R_2}}$$

נפתור דוגמא פחות טריוויאלית



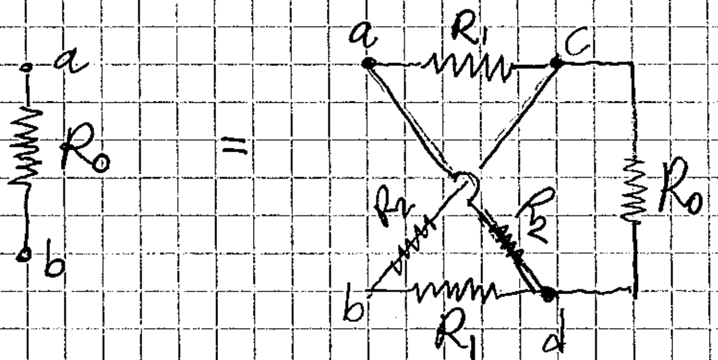
עד אינסוף

מתוך מועד ג

2013

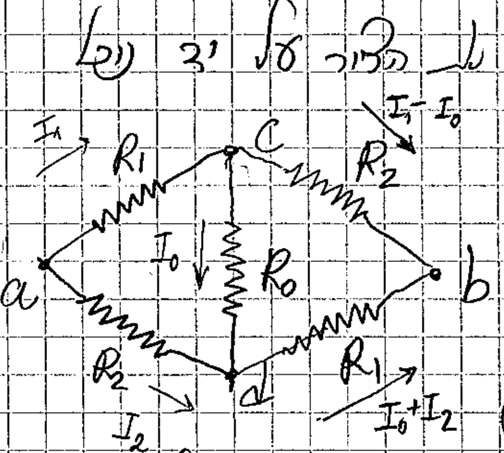
נתונה שרשרת הנגדים הבאה המגיעה אינסוף קדימה מהצורה המצוירת והשאלה מה ההתנגדות הכוללת בין a ל-b.

הדרך לפתור טורים אינסופיים כאלו היא לומר כי ההתנגדות היא R_0 ואז לומר כי



זו כבר שאלה פשוטה בהרבה שכן את הציור על ידי נוכל לצייר מחדש בצורה:

(הסתכלו דבר דבר ותראו את הקשרים)



נקרא לזרמים בשמות (כך שמתקיים חוק קירכהוף לזרמים יוצאים ונכנסים)

וכך יש לנו שלושה נעלמים, שלוש המשוואות יהיו על המתח בין a ל-b בדרכים השונות

$$I_1R_1+I_0R_0+R_1(I_0+I_2)=V$$
$$I_1R_1+(I_1-I_0)R_2=V$$
$$I_2R_2+(I_0+I_2)R_1=V$$

ובאותו אופן ,

$$(R_0+R_1)I_0 + R_1 I_1 + R_1 I_2 = V$$
$$-R_2 I_0 + (R_1+R_2) I_1 = V$$
$$R_1 I_0 + (R_1+R_2) I_2 = V$$

מפתרון המשוואות נקבל כי הה"ש המעגלית הכללית שמקיים

$$R_{total}(I_1+I_2) = V$$

ואז נמצא ש- R_{total} יהיה R_0 בהתאם לדרישה
שבו

$$R_0 = \sqrt{R_1 R_2}$$

~~בשאלה זו יש מספר משוואות~~

~~המתח הכולל הוא~~ $\cancel{R_0(I_1+I_2) = V}$

~~ושווה בכל ... וכן:~~ $\cancel{I_2 R_2 + (I_0+I_2) R_1 = V}$

$$\cancel{\sqrt{R_1 R_2}(I_1+I_2) = I_2 R_2 + (I_0+I_2) R_1}$$

~~נדון במקרה הספציפי בו~~ $\cancel{R_0 = R_1 = R_2 \equiv R}$ ~~במקרה זה:~~

$$\cancel{R(I_1+I_2) = 2I_2 R + I_0 R}$$

נדון במקרה $R_0 = R_1 = R_2 = R$

במקרה זה המשוואות הן

$$(I_1 + I_1 - I_0)R = V$$
$$(I_2 + I_2 + I_0)R = V$$
$$(2I_0 + I_1 + I_2)R = V$$

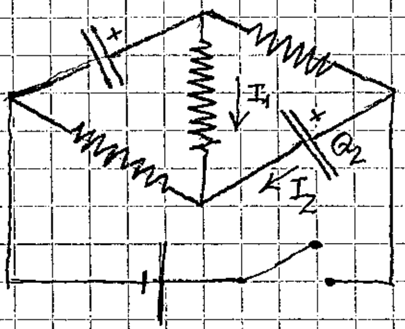
מחיבור שתי העליונות נקבל $(I_1+I_2)R = V$ ולכן

ומהמשוואה השלישית $I_0 = 0$

התוצאה שאת זה יכולנו להסיק מנימוק סימטריה

⑤ בעיה יפה ומעניינת לשלב קירכהוף עם RC

מועד א' 2010 - ש 2



נתון המעגל הבא.
גודל הנגדים R וגודל הקבלים C
בזמן $t=0$ סוגרים את המפסק.

א. מהם $Q_2(t)$, $I_2(t)$

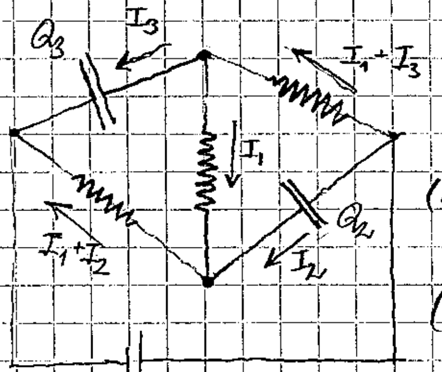
ב. מהו הזמן האופייני להגעה לש"מ ומהו $Q_2(t\to\infty)$.

ג. מהם $I_1(t)$ ו- $I_1(t\to\infty)$

פתרון

אין מה לפתור את השאלה סעיף סעיף - יש לפתור את המעגל ונשלים סימונים!

בעצם 3 משוואות יכולות להיות:



$$(1)\quad \left[(I_1+I_3)+I_1+(I_1+I_2)\right]R=V$$

$$(2)\quad (I_1+I_3)R+\frac{Q_3}{C}=V$$

$$(3)\quad (I_2+I_3)R+\frac{Q_2}{C}=V$$

נכתוב את (1) במונחים של Q_2, Q_3 ו- I_1 רק:

$$\left(3I_1+\dot{Q}_2+\dot{Q}_3\right)R=V \implies RI_1=\frac{1}{3}\left(V-R\dot{Q}_2-R\dot{Q}_3\right)$$

בעצם נוכל להציב את ה- I השונים וכך:

$$\frac{1}{3}\left(V-R\dot{Q}_2-R\dot{Q}_3\right)+R\dot{Q}_3+\frac{Q_3}{C}=V$$

$$\frac{1}{3}\left(V-R\dot{Q}_2-R\dot{Q}_3\right)+R\dot{Q}_2+\frac{Q_2}{C}=V$$

ונסכם:

$$3Q_3+2RC\dot{Q}_3-RC\dot{Q}_2=2VC$$

$$3Q_2+2RC\dot{Q}_2-RC\dot{Q}_3=2VC$$

נחבר עתה המשוואות של Q_3 ו-Q_2 וכך נקבל משוואה אחת.

נחסר אותן זו מזו וכך נקבל את השניה:

$$3(Q_3+Q_2)+RC(\dot{Q}_3+\dot{Q}_2)=4VC$$

$$3(Q_2-Q_3)+3RC(\dot{Q}_2-\dot{Q}_3)=0$$

ולאחר שנגדיר

$$Q_+=Q_3+Q_2$$

$$Q_-=Q_2-Q_3$$

נקבל:

$$3Q_++RC\dot{Q}_+=4VC$$

$$Q_-+RC\dot{Q}_-=0$$

למעשה, ע"י המעבר ל- Q_+, Q_- הפרדנו מצימוד המשוואות כעת נוכל לפתור.

נתחיל מ- Q_-, ננחש $Q_-=Ae^{-\frac{t}{T_-}}$ ונקבל:

$$Q_-+RC\dot{Q}_-=Ae^{-t/T_-}\left(1-\frac{RC}{T_-}\right)=0$$

וכך $T_-=RC$ ונסיק

$$\boxed{Q_-(t)=Ae^{-\frac{t}{RC}}}$$

הפתרון של Q_+ יש חלק הומוגני וחלק פרטי וקל לראות כי:

$$\boxed{Q_+=\frac{4}{3}VC+Be^{-\frac{3t}{RC}}}$$

(7)

כעת נעבור על סכום Q_+ ו- Q_- של Q_2 ו- Q_3

$$Q_2+Q_3=Q_+ \qquad\qquad Q_2=\frac{1}{2}(Q_++Q_-)$$
$$\Longrightarrow$$
$$Q_2-Q_3=Q_- \qquad\qquad Q_3=\frac{1}{2}(Q_+-Q_-)$$

נשים לב כי ב- $t=0$; $Q_3(t=0)=Q_2(t=0)=0$

לכן $Q_-(t=0)=0$ ומכאן $A=0$ ופשוט:

$$Q_2=Q_3=\frac{1}{2}Q_+=\frac{2}{3}VC+\frac{B}{2}e^{-\frac{3t}{RC}}$$

ומתוך הדרישה שבזמן $t=0$ $Q_2=Q_3=0$ נגיע למציאת של B ולהסיק

$$\boxed{Q_2(t)=Q_3(t)=\frac{2}{3}CV\left(1-e^{-\frac{3t}{RC}}\right)}$$

כאשר המטען למעשה פתור ונשאר רק לענות על השאלות

א. את $Q_2(t)$ מצאנו ומכאן קל למצוא $I_2=2\frac{V}{R}e^{-\frac{3t}{RC}}$

ב. הזמן האופייני להגעה לש"מ הוא $T\approx RC/3$ והמטען בש"מ יתקבל $Q_2(\infty)=\frac{2}{3}CV$

ג. $I_1(t)=\frac{1}{3}\left(\frac{V}{R}-\dot{Q}_2-\dot{Q}_3\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{V}{R}-2\dot{Q}_2\right)=\dots$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{V}{R}-2I_2\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{V}{R}-\frac{4V}{3R}e^{-\frac{3t}{RC}}\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{I_1(t)=\frac{V}{3R}\left(1-4e^{-\frac{3t}{RC}}\right)}$$

נשים לב כי I_1 הופך כיוון בשלב מסויים

נבין מה קורה:

בשלבים הראשונים אין מתח על הקבלים ולכן על מנורה לטעון אותם
עוברים מטענים בזמן לכיוון I_1, לאחר זמן מה עוברת
כמות מספיקה של מטענים ואז מתחילים הקבלים להתפרק
בנתיים והזרם עובר בריבוי דרך הנגדים.
לבסוף מספיקה הדרושה ומגיעים ל- S.S כאשר כל
המתח מושקע בקבלים.

הערה חשובה: איך נפתור את Q_- ו- Q_+

המשוואות ($RC=T$)

$$3Q_3+2T\dot{Q}_3-T\dot{Q}_2=2VC$$
$$3Q_2-2T\dot{Q}_2-T\dot{Q}_3=2VC$$

נגדיר $\vec{Q}=\begin{pmatrix}Q_3\\Q_2\end{pmatrix}$ ו- $\dot{\vec{Q}}=\begin{pmatrix}\dot{Q}_3\\\dot{Q}_2\end{pmatrix}$ וכך $3\vec{Q}+\overleftrightarrow{A}\dot{\vec{Q}}T=\vec{U}$

כאשר $\vec{U}$ הוא וקטור פתרונות $\begin{pmatrix}2VC\\2VC\end{pmatrix}$ ו-, $\overleftrightarrow{A}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

נראה כי המטריצה $\overleftrightarrow{A}$ אינה נורמה שכן היא מערבבת את Q_3 ו- Q_2, לכן היינו רוצים לכתוב את הוקטורים העצמיים שלה.

הפולינום האופייני:

$$\det\begin{vmatrix}\lambda-2&1\\1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2-1=\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

לכן הערכים העצמיים הם 3 ו- 1

נמצא את הוקטורים העצמיים

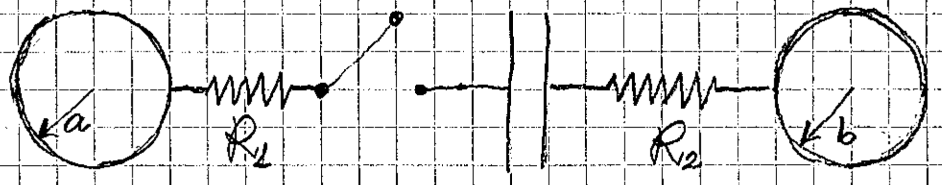
$$\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2X-y\\-X+2y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}X\\y\end{pmatrix}$$

עבור ע"ע 1 נקבל $X=y=1$

" 3 " $X=-y$

וכך קיבלנו נגדיר וקטורים עצמיים Q_+ ו- Q_-

מועד ב' 2009 - בעיה משופרת לש' 2



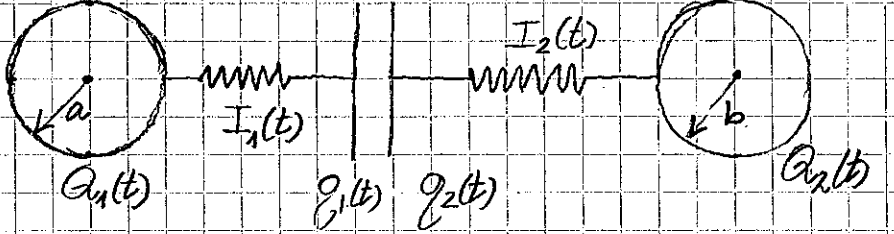
שתי קליפות מוליכות שרדיוסיהן a ו-b מחוברות כמו בציור

כאשר R_a ו-R_b הם נגדים והקבל שבאמצע הינו קבל לוחות בעל שטח S ומרחק d בין לוחות הקבל.

טוענים את הקליפה בעלת רדיוס a במטען כולל Q_0 וברגע $t=0$ סוגרים את המפסק.

א. מצאו משוואות המתארות את המטען של כל קליפה בכל זמן

נסמן את הקליפות סימונים ואחר כך נכתוב קשרים:



בשלב הראשון יש לנו 6 פרמטרים חופשיים: $Q_1, I_1, q_2, Q_2, I_2, q_2$
בפועל קיימים ביניהם קשרים רבים שיאפשרו לנו בסופו של דבר לפתור את השאלה במלואה.

<u>נתחיל בקבל</u>:

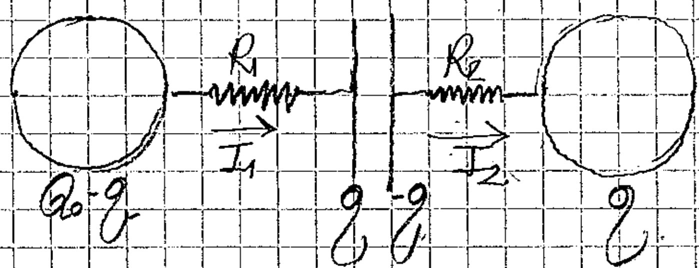
אם שני לוחות קבל טעונים במטענים שונים הרי שהקבל משרה שדה אפס מחוצה לו בקירוב של קבל אינסופי. נסיק שהשדה יוצר מרחק אינסופי בין שני הכדורים (הנחה שהתילים ארוכים). לכן בהכרח $q_1 \equiv -q_2 \equiv q$

שני פרמטרים נוספים שאותם נוכל להוריד נובע משימור המטען.
כל החלק המסומן באינדקס "1" המטען ההתחלתי הוא Q_0
ושל כל החלק המסומן באינדקס "2" המטען הכולל הוא "0". לפיכך:

$$Q_1 + q_1 = Q_0 \Longrightarrow Q_1 = Q_0 - q$$

$$Q_2 + q_2 = 0 \Longrightarrow Q_2 = q$$

ובסה"כ התמונה היא:



נשים לב כי מכאן היינו מצפים כי כיווני הזרמים I_1 ו-I_2 יהיו כבדור ומכאן קל לראות כי $I_1 = I_2 = \dot{q}$
למעשה נשארנו עם בעיה של משתנה יחיד q.

נגדיר את קיבול הקבל להיות $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ וכך נוכל למדוד את המתח על הקבל $\left(V = \frac{Q}{C}\right)$ ואת המתח על הנגדים $(R\dot{q})$.

$\frac{K(\text{מטען הקליפה})}{\text{רדיוס הקליפה}}$

נשים לב כי המתח על כל אחת מהקליפות המוליכות הוא
כלומר $\frac{K(Q_0-q)}{a}$ ו-$\frac{Kq}{b}$

לפיכך הפרש המתחים הוא $V = \frac{K(Q_0-q)}{a} - \frac{Kq}{b}$

מצד שני הפרש המתחים בין הקצוות של מתחי הנגדים והקבל וכך:

$$\frac{K(Q_0-q)}{a} - \frac{Kq}{b} = \frac{q}{C} + (R_1+R_2)\dot{q}$$

(11)

או בניסוח אחר:

$$\frac{KQ_0}{a}=\left(\frac{K}{a}+\frac{K}{b}+C^{-1}\right)q+\left(R_1+R_2\right)\dot{q}$$

נשים לב כי כל האיברים המוכפלים ב- q הם למעשה קיבולים של קבלים שהם המחוברים בטור (קבל לוחות ושני קבלים כדוריים) וכל האיברים המוכפלים ב- $\dot{q}$ הם פשוט נגדים המחוברים בטור.

קיבלנו משוואה בה ניתן למצוא את q ומכאן את Q_1 ו- Q_2 (זוהי משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון עם תנאי התחלה $q=0$)

ב. פתור את המשוואה שקיבלת בזמנים ארוכים.

בזמנים ארוכים אנחנו מצפים להגיע ל- steady state כלומר למצב בו $\dot{q}$ מתאפס. במצב זה:

$$\frac{KQ_0}{a}=\left(\frac{K}{a}+\frac{K}{b}+C^{-1}\right)q_{ss}\Rightarrow q_{ss}=\left(\frac{K/a}{K/a+K/b+C^{-1}}\right)Q_0$$

זכור רק! $C^{-1}=\frac{4\pi K d}{S}$

$$q_{ss}=\left(\frac{K/a}{K/a+K/b+\frac{4\pi K d}{S}}\right)Q_0 \underset{\cdot\frac{a}{K}}{=}\left(\frac{1}{1+\frac{a}{b}+\frac{4\pi a d}{S}}\right)Q_0=\dots$$

מונה ומכנה

$$\dots\left(\frac{S\cdot b}{Sb+Sa+4\pi abd}\right)Q_0$$

לסיכום סה״כ ערך q ב- steady state:

$$\boxed{q_{S.S}=\left(\frac{S\cdot b}{S\cdot b+S\cdot a+4\pi abd}\right)Q_0}$$

ד. פתור את משוואות סעיף ג' בכל זמן.

נניח שהפתרון בכל זמן הוא $q(t)=q_{s.s}+q_H(t)$

ורק נקבל משוואה !

$$\frac{KQ_0}{a}=\underbrace{\left(\frac{K}{a}+\frac{K}{b}+C^{-1}\right)q_{s.s}}_{\text{מתוך פתרון ה- s.s המחובר הזה שווה בדיוק ל- }\frac{KQ_0}{a}}+\left(\frac{K}{a}+\frac{K}{b}+C^{-1}\right)q_H+(R_1+R_2)\dot{q}_H$$

ורק אנחנו מקבלים משוואה לפתרון ההומוגני

$$0=\left(\frac{K}{a}+\frac{K}{b}+C^{-1}\right)q_H+(R_1+R_2)\dot{q}_H$$

נגדיר C_{tot}^{-1} ו- R_{tot} כך ש- $0=C_{tot}^{-1}q_H+R_{tot}\dot{q}_H$

ורק $q_H(t)=q_H(t=0)e^{-\frac{t}{R_{tot}C_{tot}}}$

נשים לב כי בזמן $t=0$ $q(t=0)=0$

וכיוון ש- $q=q_{s.s}+q_H$ נסיק כי $q_H(t=0)=-q_{ss}$

$$q_H(t)=(-q_{s.s})e^{-\frac{t}{R_{tot}C_{tot}}}$$

ובהצבה $q=q_{ss}+q_H$:

$$q(t)=q_{ss}\left(1-e^{-\frac{t}{R_{tot}C_{tot}}}\right)$$

כוח לורנץ

יש שדה מגנטי $\vec{B}=B_0\hat{y}$ ונרצה לראות
כיצד נע חלקיק שמהירותו ההתחלתית $v=v_0\hat{z}$

מהשיעור שלנו יודעים כי: $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$

לכן ברגע $t=0$ הכוח שיפעל יהיה:

$$\vec{F}_{(t=0)}=qv_0\hat{z}\times B_0\hat{y}=qv_0B_0(-\hat{x})$$

אבל אם כך הדבר הרי שבזמן $t\neq 0$ יהיה לחלקיק
רכיב מהירות בכיוון $\hat{x}$.

נרצה לכתוב משוואות תנועה לכל זמן:

$$F_{(t)}=qv_z(t)\hat{z}\times B_0\hat{y}+qv_x(t)\hat{x}\times B_0\hat{y}\Rightarrow$$

$$m\left(\dot{v}_z(t)\hat{z}+\dot{v}_x(t)\hat{x}\right)=qB_0\left(v_z(-\hat{x})+v_x\hat{z}\right)$$

משוואת תנועה בציר x
$$m\dot{v}_x=-qB_0v_z$$

משוואת תנועה בציר y
$$m\dot{v}_z=qB_0v_x$$

נגדיר $\omega = \frac{qB_0}{m}$ ונקבל מצוין!

$$\dot{v}_x = -\omega v_z \quad , \quad \dot{v}_z = +\omega v_x$$

מתוך המשוואה השנייה (של $\dot{v}_z$) נבודד את v_x $\quad v_x = \omega^{-1}\dot{v}_z$

נגזור את המשוואה הזו ונקבל $\dot{v}_x = \omega^{-1}\ddot{v}_z$ ולאחר הצבה

במשוואה הראשונה נקבל

$$\omega^{-1}\ddot{v}_z = -\omega v_z \Rightarrow \ddot{v}_z = -\omega^2 v_z$$

המשוואה הזו מוכרת לנו היטב והפתרון:

$$v_z = v_0\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Downarrow$$

$$v_x = v_0\sin(\omega t + \varphi)$$

כאשר התנועה כאן היא במעגל

הבנית תקינה במבט סיבובי של שאלה א.